



Análisis mecánico del diseño de la botella silbato de tipo geométrico

Analysis of the mechanical design of a whistle bottle with geometric shape

Belen Crespo Pauta¹ y Alex Estrada-García²

¹Universidad Nacional de Educación. E-mail: bcrpa.sci@gmail.com ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8111-5537>

²Universidad Nacional de Educación - Universidad Nacional de Chimborazo. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5278-8221>

Resumen

Los museos de Ecuador albergan artefactos de origen prehispánico que, algunos de ellos, han sido analizados desde enfoques musicológicos. Estas cerámicas poseen técnicas complejas de elaboración que motivaron el presente estudio, cuyo propósito es sustentar el valor de los saberes y las prácticas ancestrales mostradas en la producción de objetos catalogados hoy como instrumentos musicales aerófonos, específicamente la botella silbato de la cultura Chorrera. El objetivo es realizar una exploración técnica de los rasgos morfológicos de la botella silbato de tipo geométrico para evidenciar el diseño planificado por parte de los constructores y la amplitud de los saberes de los pueblos originarios del Ecuador. La investigación, de tipo exploratorio y descriptivo, aplica un enfoque transdisciplinar que integra conocimientos de ingeniería mecánica y pedagogía de las artes. Como resultado se resalta la intención planificada del diseño geométrico de la botella silbato con características geodésicas; se evidencia principios de geometría diferencial, física e ingeniería mecánica en el artefacto, mismo que yace en el Museo de la Casa del Alabado; consecuentemente, el estudio es un aporte para una nueva categorización de los instrumentos musicales y el patrimonio sonoro del Ecuador.

Palabras clave: Botella silbato; Geometría; Transdisciplinariedad; Conocimiento; Retro ingeniería.

Abstract

Museums in Ecuador house pre-Hispanic artifacts, some of which have been analyzed from musicological perspectives. The complex manufacturing techniques of these ceramics motivated the present study, which aims to substantiate the value of the ancestral knowledge and practices demonstrated in the production of objects currently classified as aerophone musical instruments –specially, the whistle bottle of Chorrera culture. The objective is to conduct a technical exploration of the morphological features of a geometric-type whistling bottle to evidence the intentional design by its makers and the comprehensive knowledge possessed by Ecuador's indigenous peoples. The results highlight the intentionality behind the whistling bottle's geometric design, which features geodesic characteristics; furthermore, principles of differential geometry, physics and mechanical engineering are evident in the analyzed artifact, currently housed at the Casa del Alabado Museum. Consequently, this study contributes to a new categorization of musical instruments and Ecuador's sonic heritage.

Keywords: Whistle Bottle; Geometry; Knowledge; Transdisciplinary; Retro-engineering.

Introducción

La botella silbato de tipo geométrico monocámara forma parte de la colección del museo Casa del Alabado ubicado en la ciudad de Quito en Ecuador. El museo cuenta con un repositorio de objetos de categoría patrimonial que, en la actualidad, se encuentran catalogados como obras de arte, debido a la creatividad estética, valor cultural y a las técnicas de la alfarería que fueron empleadas para la creación de objetos de cerámica que durante milenios aun prevalecen. En este estudio, se realiza un análisis desde la

aproximación a las dimensiones métricas del diseño de la botella silbato monocámara de tipo geométrico, tomando en consideración el empleo de un método no invasivo que respeta los protocolos de preservación de la pieza.

La botella silbato con código MRT0089 se encuentra en un estado de conservación íntegro desde el punto de vista material, sin evidencia visible de fracturas o alteraciones estructurales. De acuerdo con las especificaciones dimensionales del material y del estilo facilitadas por la entidad que custodia el artefacto, sus medidas y datos



son los siguientes:

Altura: 22,5 cm
Diámetro Mayor: 17,7 cm
Diámetro de la boca de la botella: 2,5 cm
Material: Cerámica
Chorrera: (1000-100 a.C)

Este artefacto se encuentra clasificado como un objeto sonoro de viento. Es necesario tener presente que el contexto arqueológico del artefacto se encuentra fragmentado, éste ha sido extraído de su red de relaciones arqueológicas que permitirían reconstruir con precisión su procedencia y función. Sin perjuicio de lo mencionado, el artefacto en sus dimensiones –mediante la descripción y análisis técnico de esta investigación– permite reconstruir parcialmente la memoria material del artefacto. Según Sörman *et al.* (2023) la memoria material hace referencia a la capacidad de un objeto o de un fragmento de remitir una historia, una identidad o una relación social. Desde esta perspectiva el artefacto puede ser rearticulado dentro de un nuevo ensamblaje histórico desde la materialidad remanente.

En relación con la ficha técnica del museo el artefacto aparece cronológicamente identificada como Chorrera (1000-100 a.C), en este sentido el artefacto no se podría interpretar como evidencia cerrada de un asentamiento, debe entenderse principalmente como una atribución estilística comparativa. En este contexto, Crespo Toral (1966); Ayala Esparza *et al.* (2019) señalan que el estilo cerámico Chorrera puede apoyarse en sus rasgos materiales, técnicos y visuales más que en una procedencia arqueológica documentada. Se han documentado objetos atribuidos a la tradición Chorrera en distintas zonas de la costa del Ecuador desde Esmeraldas hasta el Valle de Jubones en la provincia de El Oro, principalmente en la Costa de Manabí, también en Cañar, Azuay, Santo Domingo de los Colorados y Suroccidente de Colombia. La data de la tradición Chorrera es debatida entre académicos e investigadores; por ejemplo, de acuerdo con la periodización de Ayala Mora (2008), el Formativo Temprano (3900 – 1300 a.C) y el Formativo Tardío se sitúa aproximadamente entre (1300 y 550 a.C) periodo en donde se encuentra datada la botella silbato de tipo geométrico monocámara.

Además, sobre la clasificación tipológica de las botellas silbato en el Ecuador, Ayala-Esparza *et al.* (2015) explica que la morfología de este tipo de artefactos no considera a las de tipo geométrico, esto puede explicarse, posiblemente, por la dificultad de establecer de manera concluyente la intencionalidad formal geométrica en su configuración.

El objetivo principal de esta investigación es evidenciar la presencia de la intención planificada de la construcción de este artefacto, descartando una configuración

producto de la imaginación espontánea por parte de quienes lo construyeron. Los conceptos matemáticos contemporáneos que se utilizan en la presente investigación, así como las herramientas geométricas y de cálculo empleadas, constituyen recursos destinados a describir la organización formal del objeto; más no de atribuir a los constructores del artefacto este conocimiento explícito tal como lo conocemos.

Se resalta que quienes construyeron la botella silbato dejaron un conocimiento operativo presente, capaz de producir resultados replicables mucho antes de existir una formulación teórica de los principios involucrados Michael Polanyi científico y filósofo en su obra “La dimensión tácita” en 1966 expone esta idea, así como Adrian Currie y Anton Killin en su publicación “De las cosas al pensamiento: arqueología cognitiva” en 2019, sostienen que los restos materiales son evidencia que permite reconstruir capacidad cognitiva, conocimiento, formas de razonamiento, planificación, capacidades técnicas de quienes los produjeron.

El diseño de esta botella condensa conocimiento abstracto, entiéndase esto como estructuras conceptuales no observables en el mundo físico, como los números y sistemas lógicos, la curvatura por ejemplo es visible en el mundo físico pero el conocimiento abstracto no se revela hasta que se lo analiza, esta porción geoide de manera intencional se encuentra presente para compensar la condición de que las figuras puedan cubrir completamente un plano sin dejar huecos o superponerse, al hablar de esta curvatura se deja de entender las figuras descritas sobre un plano y se entienden sobre una superficie curva y abordamos su análisis desde un espacio no euclidiano (Coexeter, 1974), en este caso puntual un poliedro con características geoides también se lo denomina sólido de revolución, la demostración numérica de esta afirmación se presenta más adelante y su propósito es mantener dimensiones que cumplan principios de regularidad, simetría y armonía.

El enfoque de estudio es de carácter transdisciplinar debido a que se integran conocimientos de ingeniería mecánica, pedagogía de las artes y las humanidades. De acuerdo con Estrada-García y Estrada (2020) el enfoque transdisciplinar posibilita superar la visión fragmentada del conocimiento, integrar saberes ancestrales, artísticos, científicos, fomentando el pensamiento complejo, consecuentemente, ampliando el conocimiento. Por ejemplo, este estudio que ha sido abordado desde la parte técnica para devolver a los pueblos originarios del Ecuador el valor de su amplio conocimiento sobre las áreas que en la actualidad denominamos politécnicas. De igual forma, se resalta que el análisis de corte transdisciplinar es fundamental para comprender el pasado, resolver problemas del presente con proyección al futuro superando retos planetarios e integrando los saberes presentes en diversos contextos (Estrada-García, 2020).

Después de realizar un mapeo bibliográfico referente a la forma geométrica que presenta el cuerpo de la botella silbato, esta configuración no se ha encontrado catalogada en la literatura académica (Weisstein, 2008), su catalogación requiere estudios más específicos como tomografías para saber el grosor de las paredes o escaneos tridimensionales de alta precisión para reconstruir de manera integral y determinar la volumetría del artefacto. Esta investigación constituye una primera etapa para que posteriormente permita llevar a cabo estudios más específicos sobre su relación de sonido y estructura y, por ende, un análisis de mayor complejidad. Esta configuración geométrica del cuerpo del objeto no se encuentra con una denominación tipo: cubo, cilindro, dodecaedro o formas previamente definidas debido a su configuración poligonal regular dispuesta sobre una superficie volumétrica no plana (Coexeter, 1974). Sin embargo, a primera vista el observador puede confundirse debido a la presencia de sus doce lados pentagonales que se asemeja a un dodecaedro, en la literatura académica no se atribuye el origen de esta configuración geométrica a un autor específico (Martín y Granado, 2014); a pesar de ello, se menciona en registros pre-pitagóricos como referencia de conocimiento de construcción y cálculo de figuras tridimensionales, como macro ejemplo tenemos el complejo de Guiza en Egipto con sus pirámides con data alrededor de 2589 a.C. (Spence, 2000). En este contexto, la botella silbato pasaría a ser un sustento material de conocimiento pre-pitagórico en las Américas.

Con el propósito de sustanciar el estudio de esta botella se toman elementos de postulados pitagóricos que se mantienen hasta la actualidad, en su diálogo conocido como "Timeo" en el año 360 a.C, Platón, Teeto quien fue parte de la escuela pitagórica, hizo pública la teoría general de los poliedros; Euclides en su libro VI de "Los Elementos" y la demostración de la existencia únicamente de cinco poliedros regulares (Kenny, 2012); Euler y Fra Luca Pacioli quienes estudiaron con rigor estos cuerpos. Fra Luca Pacioli (1445-1517) quien dedicó gran parte de su vida a la docencia en matemáticas en las principales universidades y en las cortes de Italia, escribió su obra "*De divina proportione*" en la que estudia las relaciones de los poliedros con la proporción áurea considerándola como el principio universal, objeto de belleza en el universo que propone como punto de referencia de las manifestaciones artísticas (Paccioli, 2017). De igual forma, Johannes Kepler (2019) asoció los sólidos platónicos con orbitas planetarias en su libro "*Mysterium cosmographicum*".

Descripción visual del objeto

- Objeto tridimensional con características geométricas.
- Dos caras hexagonales regulares, una superior en sus lados con arcos que forma una curvatura y la inferior con sus lados rectos.
- Doce porciones pentagonales regulares, seis superiores con un lado en forma de arco y las

inferiores con sus lados rectos.

- Un pico, una estructura tubular vertical reducida hacia la mitad.
- Un asa que tiene una forma ovalada en forma de arco que conecta el cuerpo con el pico.
- Presenta colores en paleta cromática terrosa en donde predomina el rojo anaranjado en la zona superior posiblemente asociado a un engobe.
- Ocre amarillento en el cuerpo central.
- Marrón Oscuro en áreas de transición
- Negro grisáceo en manchas irregulares localizadas sobre la superficie.
- Beige claro en algunos bordes sobre las zonas laterales expuestas.

Registro técnico-dimensional

- Objeto tridimensional geométrico con características geoide en la parte superior.
- 14 caras: 2 hexagonales – 12 pentagonales.
- Los arcos hexagonales convexos, los arcos pentagonales cóncavos que se acoplan entre sí.
- 36 aristas: 6 aristas en arco y 30 aristas rectas.
- 24 vértices,
- Altura aproximada: 21 cm, 14cm aproximadamente el cuerpo de la botella – 7cm aproximadamente el pico de la botella.
- Ancho aproximado: 18cm.
- 2 agujeros de salida aproximadamente 2mm cada uno en la parte distal del asa donde se une con el cuerpo de la botella.
- Todos los lados de la botella miden aproximadamente 6cm.



Figura 1. *Botella Chorrera*, (Cerámica, cultura Chorrera). Museo Casa del Alabado, Quito, Ecuador.

Figure 1. *Chorrera Bottle*, (Chorrera culture, ceramic). Casa del Alabado Museum, Quito, Ecuador.

Euler propuso la siguiente fórmula para establecer que una figura es parte de los poliedros, tenemos la siguiente expresión:

$$V - A + C = 2$$

En otras palabras, **Vértices** – **Aristas** + **Caras** debe ser igual a 2 por lo que reemplazando por los datos mencionados tenemos que:

$$24 - 36 + 14 = 2$$

Según este postulado cumple con los parámetros de un poliedro. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que los poliedros hacen referencia a cuerpos tridimensionales con caras planas, lo que llama la atención en este objeto es que si marcamos una línea en el ecuador del objeto podemos observar dos porciones una superior y otra inferior, en la parte inferior su configuración es una configuración poliédrica totalmente plana pero en la parte superior tenemos la presencia de una curvatura por lo que, para esta botella silbato se analiza desde una perspectiva de poliedro en un espacio no euclidiano, poliedro esférico por sus características geodésicas y la presencia de una curvatura positiva o cóncava, para este estudio se lo denominará sólido de revolución (Zenil, 2011).

Al analizar las diferentes medidas que se obtuvieron se procedió a realizar cálculos de aproximación al diseño de la botella silbato, se evidencia y demuestra la intención planificada para su construcción, debido al grado de cálculo de la misma para alcanzar la simetría y armonía en las formas y proporciones de su diseño.

Por su parte, el Museo Casa del Alabado (2025) en la ficha de colección física describe lo siguiente con respecto a la botella silbato: “La estructura geométrica de doce lados pentagonales de esta botella es un acto de imaginación. Puede ser interpretada como una fruta idealizada o un cristal mineral”. Por lo expuesto, el objetivo de este estudio es demostrar que en este artefacto existe una intención planificada por parte de los constructores y la

amplitud del conocimiento de los saberes ancestrales de los pueblos originarios del Ecuador mediante el cálculo geométrico y topológico de la botella silbato de tipo geométrico que encarna conocimientos precisos en cada aspecto de su diseño.

Materiales y métodos

En esta sección se describe el procedimiento de calibración para el registro fotográfico y recolección de datos, este método no invasivo y de medición digital indirecta se usó de primera mano, debido a los protocolos de preservación del objeto, la escala de referencia fue ajustada con base en las medidas proporcionadas en la ficha técnica del museo, utilizando la aplicación *Measure* del Iphone 13 (véase Figura 2), al tener una medida oficial por parte de la ficha técnica que proporciona el museo, se consideraron las condiciones de iluminación, la reflexión producida por la vitrina y otros posibles factores de distorsión visual hasta coincidir con la altura de 22cm ya que la aplicación de *Measure* no proporciona decimales sino aproxima números enteros, en ese punto se procedió a medir los lados de los pentágonos y la diagonal, de este modo podemos decir que si la ficha oficial nos da un valor certificado de 22,5 cm para el objeto y se calibró a sabiendas que no existen decimales a 22 cm, se puede decir que el error en la aproximación métrica esta debajo de un 3%.

Este procedimiento permitió obtener una aproximación métrica lo suficientemente confiable para continuar con los cálculos necesarios y realizar una reconstrucción del cuerpo del objeto a escala real 1:1, cabe indicar que el objetivo de esta investigación no consiste en reproducir la pieza, es importante decir que la recreación del cuerpo del objeto ha servido como una herramienta analítica para identificar la lógica constructiva del objeto.

El enfoque técnico utilizado es la retro ingeniería, puesto que se analiza el objeto construido con anterioridad para descubrir el diseño, la estructura lógica (Segreto *et al.*, 2017). Como instrumento de registro de datos se

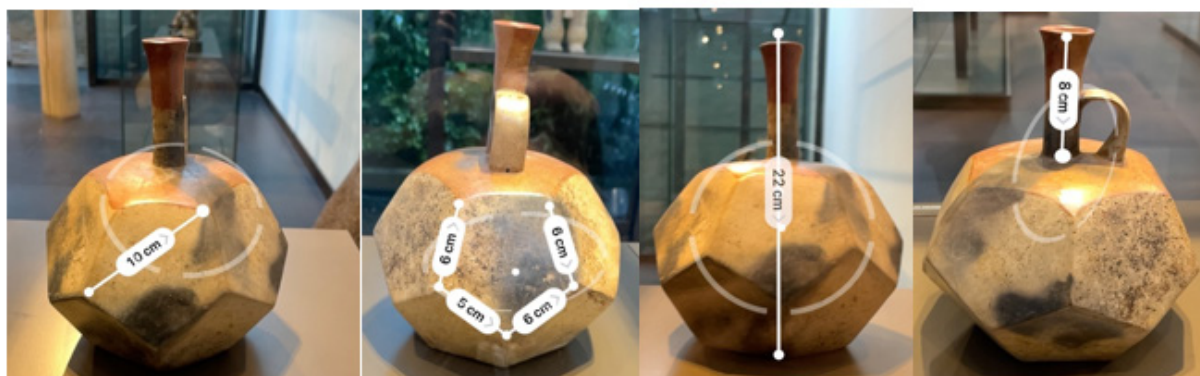


Figura 2. Fotografías tomadas mediante la aplicación “medidor” iphone apple 13.

Figure 2. Photographs taken using the Apple iPhone 13 ‘Measure’ application.

utilizó una bitácora. En ella se registró las medidas de las cuatro figuras geométricas presentes en el cuerpo de la botella, además del pico y el asa. Para ello fue necesario elaborar una estrategia de exploración, para finalmente corroborar los cálculos y las ideas mediante la creación de una maqueta del cuerpo de la botella y verificar si el método no invasivo empleado y el análisis a partir de estos datos ha sido abordado adecuadamente.

Se hizo una revisión de la literatura científica referente a esta clase de artefactos de los pueblos originarios del Ecuador (Crespo, 1966; Idrovo Urigüen, 1987; Coba, 1981; Holm, 2001; Pauta Ortiz, 2015) para tener una aproximación a los constructores y sus posibles razones para crear un artefacto que demuestra contener gran precisión en su construcción, como se indicó en la parte introductoria el artefacto ha sido extraído de su contexto arqueológico primario. Finalmente, se visitaron museos con exhibiciones arqueológicas en cuatro ciudades del Ecuador, como Quito, Guayaquil, Santa Elena y Cuenca. Se accedió a la reserva del Museo Antropológico de Arte Contemporáneo (MAAC) que cuenta con una colección de 2221 botellas y 641 son botellas silbato como tal, una de las colecciones más grandes de este tipo de artefactos en el país. Esto con el propósito de identificar artefactos similares al analizado, también se ha revisado la base de datos de la reserva del Museo de Larco en Perú en la que consta alrededor de 14000 piezas de tipo botella gollete, silbato o simplemente botella, buscando esta misma configuración sin identificar un ejemplar con la misma configuración descrita.

Los pentágonos

En la primera parte del cálculo del diseño se empezó por los pentágonos, debido a que es la figura principal que resalta al observar la botella, estos tienen una medida aproximada de 6 cm en todos sus lados por lo que se utilizó este número para calcular la diagonal del pentágono. Cabe resaltar que la construcción de un pentágono es compleja en comparación con la construcción de otras figuras como un cuadrado o un círculo, debido a la presencia de cuatro lados con una cierta inclinación, por lo que la construcción adecuada de esta figura es mediante semicírculos con razón y proporción (Zenil, 2011).

Pentágono con arco

En la botella silbato se evidencian dos tipos de pentágono, un pentágono regular con todas las líneas rectas y otro con cuatro líneas rectas y un arco. También se procedió con el cálculo de la diagonal, recordando que una diagonal es una línea que une dos vértices no consecutivos en función de un lado del pentágono (Maor y Jost, 2022); considerando, según el postulado propuesto por la escuela Pitagórica, para calcular la diagonal necesitamos la fórmula de la proporción áurea ϕ , multiplicado por uno

de sus lados según la aproximación métrica dimensional tenemos que los lados son 6cm:

$$\begin{aligned}d &= l \cdot \phi = l \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\d &= l \cdot \phi = l \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\d &\approx l \cdot 1.618 \\d &\approx 6 \cdot 1.618 \\d &\approx 9.708 \text{ cm}\end{aligned}$$

Una vez construido el pentágono se procede a calcular el apotema que es la distancia más corta entre el centro del pentágono con uno de sus lados, la fórmula para el cálculo es:

$$a = \frac{l}{2 \tan(180/n)}$$

Para aplicar esta fórmula hay que tomar en cuenta que los ángulos internos de un pentágono regular suman 180°, la mitad del ángulo central, por lo que cada ángulo dividido para 5 lados = 36°

$$\begin{aligned}a &= \frac{6}{2 \tan 36} \\a &\approx \frac{6}{2 (0.7265)} \\a &\approx \frac{6}{1.4530} \\a &\approx 4.13\end{aligned}$$

Una observación en la Figura 3 es que el centro geométrico del pentágono regular se encuentra sobre la mitad del plano del diseño, representado con la letra "c" minúscula; mientras que en la Figura 4, al dibujar el pentágono con arco, el centro geométrico de la figura se desplaza hacia las líneas de diseño que se entrelazan y que se encuentra representada con el código c1.

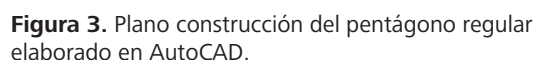
Ahora bien, en la hilera superior de la botella tenemos un pentágono modificado en uno de sus lados, este presenta un arco en la arista que tesela con el hexágono de la parte superior que se nombrará "tapa fija" con fines explicativos de las porciones, ya que la botella es un solo cuerpo. En esta sección se observa una curvatura, por lo que aquí encontramos la primera incógnita ¿qué tan curva tiene que ser la curva para no perder la regularidad de los lados? Para resolver se utilizó el postulado propuesto por la escuela Pitagórica con la fórmula de longitud de arco para determinar la flecha de arco (Zenil, 2011)

$$r = R = \frac{l}{2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Dividimos 360° de los ángulos para 5 lados del pentágono teniendo como resultado 72° por lo que:

$$\begin{aligned}r \cdot \theta &\approx 5.103 \cdot \left(\frac{72\pi}{180}\right) \\r \cdot \theta &\approx 5.103 \cdot 1.2566 \\r \cdot \theta &\approx 6.419\end{aligned}$$

Así se puede decir que, si el lado es aproximadamente



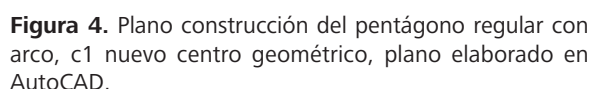
de 6 cm, existe un excedente de 0.419 cm si se estira la cuerda, misma medida que corresponde a la altura máxima del arco. Para que los ángulos internos de este pentágono sigan sumando 180° , la curvatura no debe desplazar los vértices sin cambiar las distancias angulares, a esto se lo denomina condición de simetría (Ghyka, 1968) que viene dada por la fórmula expresada y usada anteriormente para determinar la curvatura máxima de la figura.

El hexágono

La tapa fija o porción superior: es un hexágono regular con sus bordes en forma de arco cóncavo, esta estructura permite el ensamble entre el hexágono y el pentágono según consta en la descripción anterior del pentágono de curvatura convexa, lo que significa que no existen espacios entre sí.

Área del pentágono regular (a1):
(perímetro – apotema) / 2

El pentágono regular es denominado la figura armónica por excelencia debido a la relación áurea en la que el lado es la media razón del radio de una circunferencia circunscrita, además, la altura del pentágono regular es dividida en media y extrema razón por la diagonal a la que es perpendicular (López Sarda, 2016).



ISSN 1852-060X (impreso) / ISSN 1852-4826 (electrónico)

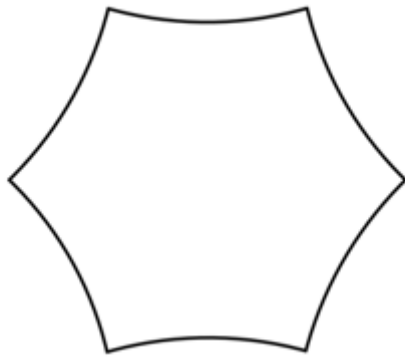


Figura 5. Plano construcción del hexágono superior, plano elaborado en AutoCAD.

Figure 5. Construction plan of the hexagon featuring an arch, created in AutoCAD.

Número de pentágonos sin arco:

$$6 * a1 \approx 370.8cm^2$$

Área del pentágono con arco (a2):

Para esto se debe calcular el área de la semi elipse que forma el arco tenemos

$$\frac{1}{2\pi} * a * b = a2$$

La mitad de la longitud de lado:

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

La altura máxima (h máx.) del arco:

$$b = 0.419$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} * 3 * 0.419 &= a2 \\ \frac{1}{2\pi} * 1.257 &= a2 \\ 1.5708 * 1.257 &\approx 1.975cm^2 \end{aligned}$$

Una vez obtenida el área del pentágono regular, le sumamos el área de la semi elipse:

$$61.8cm^2 + 1.975cm^2 \approx 6.77cm^2$$

Número de pentágonos con arco:

$$6 * 63.77cm^2 \approx 382.65cm^2$$

Área del hexágono base (a3):

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} * l^2 = a3$$

Que corresponde a la longitud de lado

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} * 6^2 \approx 93.53cm^2$$

Área del hexágono con arco (a4):

Para el área de esta figura tenemos que restar el área del hexágono base menos las porciones de semi elipse de los lados del hexágono con arco cóncavo, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} 1,975 * 6 &\approx 11.85cm^2 \\ a3 - 11.85 &= a4 \\ 93.53 - 11.85 &\approx 81,68cm^2 \end{aligned}$$

Área total del cuerpo de la botella: sin contar con los orificios de entrada del pico y el asa.

$$\begin{aligned} a1 + a2 + a3 + a4 &\approx a \text{ Total} \\ 370.8 + 382.65 + 93.53 + 81.68 &\approx 928.66cm^2 \end{aligned}$$

Se deja constancia que en este estudio no se especifica el volumen del sólido de revolución, tampoco se hace una aproximación del cuerpo, debido a que se necesita realizar un estudio radiológico o tomografía para comprender la estructura interna de la botella silbato y el espesor de las paredes, lo cual además permitiría entender la lógica del funcionamiento acústico. Sin embargo, más adelante se hace una aproximación al volumen del pico de la botella.

El patrón plegable y su desafío

En el modelo presentado en la Figura 6, que corresponde al patrón plegable de la maqueta, en el momento de armar presenta desafíos para resolver el diseño: el primero es que al armarlo con las piezas rectas la figura en volumen aumenta su altura en aproximadamente 2 cm con referencia a la pieza original y el segundo es que quedan 2 caras que no cierran totalmente, debido a que falta 0.419 cm, misma que se expresa en la curvatura del pentágono y en la curvatura del hexágono superior. Para dar solución a este faltante es necesaria la presencia de una curvatura en el diseño.

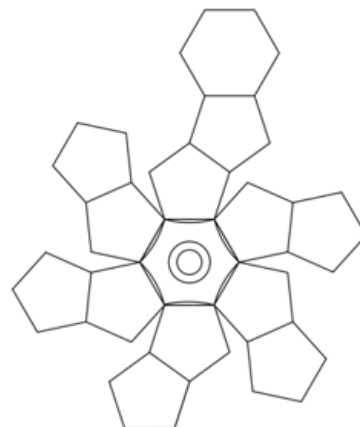


Figura 6. Plano construcción del modelo plegable del cuerpo de la botella siguiendo el patrón de torsión, plano elaborado en AutoCAD.

Figure 6. Construction plan of the foldable body model of the bottle following the torsion pattern, elaborated in AutoCAD.

Es importante recalcar que el hexágono de base se encuentra en contra posición al hexágono de la parte superior, de igual forma, se puede apreciar esto en la Figura 7, por lo que en este plano se expresa la forma de armado siguiendo el patrón de torsión con el fin de que se aprecie de otra manera la configuración de la botella.

Simetría vertical

En la botella silbato destaca la simetría vertical en el cuerpo, ya que tiene efecto espejo; las caras, aristas y vértices, siendo los opuestos simétricos produciendo equidistancia, por lo que además esto sugiere un ensamblaje posiblemente a partir de un molde, esto permitiría adecuar en la parte interna de la cámara —posiblemente circular en el centro geométrico del cuerpo— elementos como conductos o un resonador que se ha visto en gran parte de las piezas similares de esta clase (Idrovo Urigüen, 1987). Es importante reconocer la existencia de estudios que evidencian que la cultura Chorrera trabajaba sus piezas mediante la unión de dos mitades en las que generalmente una parte de ellas era un molde (Ayala-Esparza et al., 2019), incluso se puede decir que para elaborar un artefacto tan preciso previamente se obtuvieron planos.

En el plano de la Figura 7 se puede apreciar en su totalidad la distribución de sus segmentos y simetría del diseño del cuerpo de la botella.

La maqueta

Con el propósito de corroborar los datos recopilados con el método empleado descrito anteriormente, se consideró oportuno armar la figura siguiendo los planos técnicos con

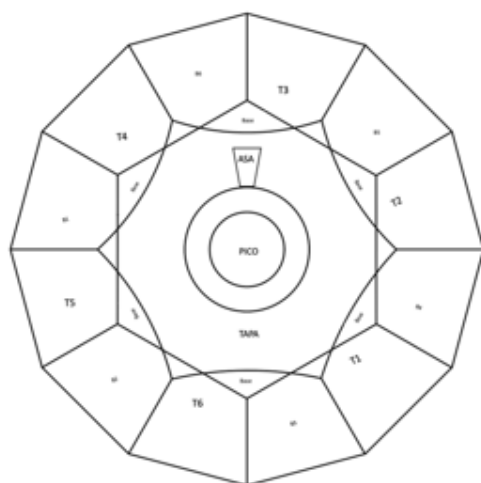


Figura 7. Plano superior del cuerpo de la botella, plano elaborado en AutoCAD.

Figure 7. Top view of the distribution of the bottle sections, elaborated in AutoCAD.

el fin de utilizarla como un recurso didáctico y entender la lógica de construcción del artefacto. Se utilizaron materiales como: etilvinilacetato (EVA) un polímero termoplástico, debido a sus características flexibles y una esfera de poliestireno expandido (EPS) de diámetro 24 cm para alcanzar la curvatura necesaria, como se observa en la Figura 8. La maqueta fue importante para realizar las pruebas y comprobar por ejemplo el cambio de ángulos planos a ángulos esféricos que se describen a continuación, por lo que al seguir la curvatura con el molde del hexágono superior se constató que no cambia la distancia entre sus lados.

La curvatura de la porción superior del cuerpo de la botella

Teselación

La teselación es un conjunto de condiciones geométricas que determinan cuando una figura puede cubrir completamente el plano sin dejar huecos ni superponerse (Coxeter, 1974). Una condición importante aparece en cada vértice donde se juntan varias figuras, la condición formal es que los ángulos alrededor deben ser exactamente 360° aun así eso no garantiza que pueda teselar.

En el caso de los pentágonos además deben cumplir relaciones específicas entre algunos ángulos, algunas longitudes de lados y la forma en la que los pentágonos encajan.

Según la ley general para los polígonos regulares estos pueden teselar por si solos si un ángulo interior divide exactamente 360°, esta condición solo se cumple para: triángulos, cuadrados y hexágonos, a esto se lo denomina teselación clásica ya que asumimos que todo se encuentra en un plano.



Figura 8. Maqueta del cuerpo de la botella en etilvinilacetato (EVA).

Figure 8. Body model made of ethylvinylacetate (EVA).

Volviendo a la idea de los pentágonos podemos decir que estos son especiales por que la suma de sus ángulos interiores siempre es:

$$(5 - 2) * 180 = 540^\circ$$

Por lo que si es regular podemos decir que cada uno de sus ángulos sería 108° .

Como se observa en este objeto el hexágono superior forma una especie de cúpula y vemos la presencia de una curvatura por lo que podemos decir que las figuras ya no teselan en el plano sino en una superficie curva por lo que en esta porción del objeto podemos hablar de geometría no euclidiana.

De manera intencional la presencia de la curvatura compensa el déficit angular, el hexágono central actúa como un centro de distribución de esta curvatura, los pentágonos absorben el cambio de ángulos, los arcos se ajustan para que no existan huecos, eliminando cualquier error de cierre y pasan de ser ángulos planos a ángulos esféricos (Coxeter, 1974).

Si ilustramos esta idea en forma numérica podemos decir que si un hexágono regular tiene 120° estamos hablando de un hexágono sobre un plano recto, pero si este mismo hexágono lo colocamos sobre una esfera sus lados seguirán midiendo lo mismo, seguirá manteniendo su regularidad, pero sus ángulos interiores podrían variar entre 123° o 125° .

En el caso de un vértice en donde se une un hexágono y dos pentágonos podemos decir que tenemos:

$$120^\circ + 108^\circ + 108^\circ = 336^\circ$$

Por lo que para completar los 360° nos faltan 24° para cumplir con la condición de teselación, así que la presencia de la curvatura geodésica compensa el déficit angular y la estructura cierra de manera completa.

Además, esto responde al nivel de inclinación que deben tener los pentágonos de la base para que los pentágonos superiores y el hexágono logren cerrarse, además de la compensación angular la correspondencia en aristas, vértices, caras y la regularidad de medidas que guarda toda la pieza.

La cúpula

"Una cúpula de geometría esférica corresponde a una porción de una esfera. En esta superficie, las curvaturas principales coinciden en todos sus puntos y dependen del radio de la esfera (Alías Linares, 2004: 28–32)."

Podemos describir la tapa fija de la botella con una

curvatura cóncava a manera de cúpula o con superficie media curva, esta forma permite encerrar la mayoría de espacio sin que las dimensiones de la superficie se alteren (Mata Gómez, 2022). La forma de cúpula está sometida a dos tipos de fuerza, tracción y compresión por lo que el tipo de material es importante, unos presentan una mayor tendencia a ser estirados, otros a ser separados, por lo que el barro cerámico, material de la botella, tiene buena resistencia a la tracción (Basset Salom, 2013). De manera complementaria, se sostiene que la teoría de láminas propuesta en el siglo XIX por Gustav Kirchhoff y Adhémar-Jean-Claude Barré de Saint-Venant es aplicable en este artefacto debido a que es una lámina delgada, en este aspecto "delgado" no significa débil ya que la eficiencia estructural permite resistir altas cargas con tensiones mínimas (Mata Gómez, 2022).

Se debe tomar en cuenta que la botella silbato resiste en su exterior el peso del pico en el centro geométrico del cuerpo y el asa dispuesta hacia un lado, coincidiendo con el lado que no comparte arista con otra cara como se aprecia en los planos presentados en la Figura 5. Además, presenta cargas de presión constante interna debido a la interacción de los fluidos líquido y gaseoso con el que acciona el artefacto, aunque el material presente ya en su estado final no es flexible o elástico, el constructor indica tener conocimiento de los esfuerzos de membrana ya que de manera intencionada se encuentra este diseño en un artefacto con interacción de fluidos.

Para hablar de la teoría de membrana en la parte exterior los bordes deben estar soportados uniformemente, en este caso por la teselación entre el hexágono con el pentágono evidenciamos esto, la intención de poner una curvatura en esta porción del objeto se debe a que el momento de la cocción, la pieza será sometida a temperaturas entre 600° y 900° centígrados (Ayala *et al.*, 2022) por lo que las esquinas solas de los pentágonos acumularían tal presión sin un mecanismo de dispersión de fuerzas de tensión y compresión del material por pasar de un estado semi sólido a sólido -como es de barro a cerámica- lo que causaría fisuras en todas las esquinas donde se encuentren los pentágonos. En este sentido, la teselación de las figuras y la dispersión de cargas por temperatura en el momento de la cocción, evidencia que la presencia de la curvatura es intencionada y no solo de carácter ornamental.

Las proposiciones que describen los objetos geométricos tridimensionales y cuerpos físicos, no se pueden explicar con teorías rectilíneas, es necesario la geometría diferencial, mediante el uso de cálculo integral y diferencial (Santaló, 1955). Según Newton la curvatura en un punto mide su desviación con respecto a la tangente, posteriormente, Gauss y Bonnet publican el teorema aplicado para polígonos con lados de curvatura geodésica, como se demostró inicialmente para que esta figura (Figura 1) cumpla con los principios de un

poliedro. En este sentido la revisión de estas referencias bibliográficas es con el propósito de contextualizar las regularidades formales observadas en la pieza como un sustento formal académico.

Continuando con el proceso de verificación de datos se escaneó el cuerpo de la botella utilizando la aplicación *Polycam* para convertir el objeto en el enmallado Gaussiano para apreciar la Figura 9.

El escaneado de la pieza permite comparar con la toma de datos iniciales del objeto.

Como se puede corroborar en la imagen 5, el programa precisa la aproximación de 6cm del lado que se estimó en el cálculo y la estimación de la diagonal.

El pico y el asa

El pico de la botella tiene una altura desde el borde del cuerpo hacia la entrada de aire de aproximadamente 7 cm, lo que corresponde a 1/3 del alto de la botella, con un diámetro de la boca aproximadamente de unos 2.5 cm de radio reduciéndose hacia la mitad, a un radio de aproximadamente 1.5 cm y volviendo a expandirse hacia el final, nuevamente a 2.5 cm.

La descripción de la morfología del conducto es una descripción general de su configuración, la presencia de un diámetro mayor de entrada, la disminución de este diámetro hacia el centro y que este se vuelva a ampliar hacia la base, responde a una perspectiva de la mecánica general en la que un fluido al ingresar con cierta presión a este sistema favorece al aumento de velocidad, pudiéndose así aprovechar mejor la energía del fluido. A esta dinámica del fluido-sistema académicamente se lo conoce como efecto Venturi y cuando se analiza la relación entre presión, velocidad y energía del flujo principio de Bernoulli (Naveira, 2007). Para probar que este sistema interviene en la producción del sonido como tal y la acústica es necesario realizar estudios específicos para determinar el grosor de las paredes, la distribución interna de los conductos y otros factores que puedan influir en la mecánica del sonido, por lo que

esta investigación hace referencia a la descripción formal visual del objeto, estudio que es necesario sentar como precedente.

El asa como se observa en el diagrama de flujo del sistema se encuentra ubicada a una distancia de 3.5 cm aproximadamente, en otras palabras, en donde el pico disminuye su diámetro. La posible razón por la que estaría ubicada en el centro del tubo es porque el flujo de aire es más rápido y puede generar vórtices estables, lo que se traduce en un sonido fuerte y claro.

Vórtices estables: el análisis de los vórtices estables permite concebir que la acústica y la aerodinámica bajo condiciones correctas de flujo de aire, geometría y presión puedan excitar ondas acústicas de manera periódica (Anselmet y Pierre-Olivier, 2021).

Como se aprecia en la Figura 10, el pico y su funcionamiento como tubo Venturi, su representación en la dinámica de flujo de aire, la ubicación del asa, en la Figura 11, el pico y asa de la botella misma.

Como referencia para contextualizar lo expuesto anteriormente, a manera de sustento formal académico, de acuerdo al texto "La Música y las Formas, un recorrido por la cosmovisión Andina" se indica lo siguiente:

"el diámetro y forma de los conductos, la presencia y distribución del resonador va a determinar si la presión interna puede ser mayor a la presión atmosférica, actuando así como un "pulmón", la presión de flujo de aire constante alimenta el flujo hacia el tubo (Pauta Ortiz, 2015); sobre todo en las botellas silbato comunicantes de doble y triple cámara "generando diversas gamas de sonidos al ser impulsado el aire por la acción mecánica del agua en su interior, generando diversas sonoridades como: borboteos, respiraciones, burbujeos, silbidos en diversas alturas creando melodías producto de los intervalos" (Pauta Ortiz, 2015: 137).

Una observación en el pico es que tiene una ligera

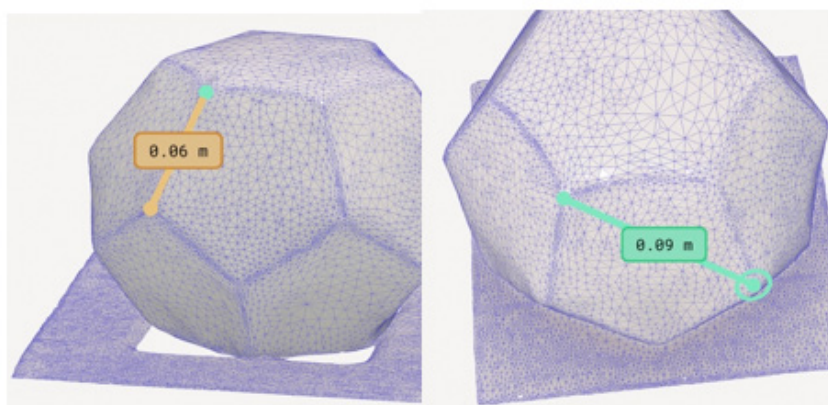


Figura 9. Verificación de las medidas de la maqueta del cuerpo de la botella para comparar con la toma de datos de la figura 2.

Figure 9. Verification of the model measurements of the body of the bottle to compare the data collection with the figure 2.

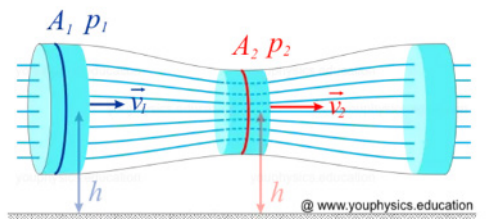


Figura 10. Tubo Venturi, mostrando el efecto Venturi: cuando un fluido pasa por un estrechamiento, su velocidad aumenta y su presión disminuye (adaptado de Efecto Venturi, YouPhysics).

Figure 10. Venturi tube showing Venturi effect: when a fluid goes through a narrowing, it's speed increases and it's pressure decreases (adapted from Venturi effect, YouPhysics).

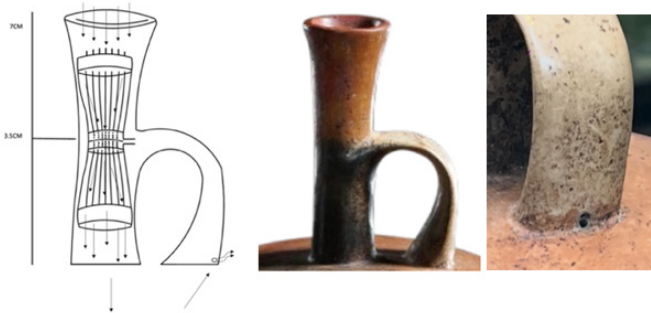


Figura 11. Pico a manera de tubo Venturi, asa en la mitad del pico, comparación, doble agujero de salida en el asa.

Figure 11. Spout bottle acting as a Venturi tube, handle in the middle of spout, comparison, double outlet hole in the bottom of the handle.

inclinación fuera del eje de simetría central de la botella, por lo que esto pudo haber sido causado por un proceso abrupto entre la exposición a la temperatura de cocción y un enfriamiento repentino de la pieza cerámica.

A su vez el asa tiene forma de arco y un doble agujero de salida justo en donde la parte más distal se une al cuerpo, un agujero situado encima de otro de aproximadamente 2mm cada uno, además se encuentran dentro de la forma de un semicírculo, todos estos datos son cruciales y fundamentales para establecer en etapas posteriores de la investigación cómo funciona el flujo y la interacción como tal de los fluidos. En complemento, Crespo (1966) describe que las botellas silbato simples, como el artefacto

en estudio, con achatamientos polares, pico alto, recto con borde, asa arqueada involucra la caja de resonancia.

Los sólidos de revolución

Esta aproximación al volumen del pico de la botella ha sido realizada en el software Geogebra por lo que esta porción, como se observa en la Figura 12, también, es un sólido de revolución denominado desde la geometría descriptiva por Gauss y Riemann como "hiperboloide de una hoja" (Linares, 2004). Para expresar esto utilizamos una ecuación cuadrática que permite manipular el estiramiento o estrechamiento en las 3 dimensiones:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Recordando que X y Y corresponden al alto y ancho de la pieza, pero además al ser un volumen tenemos que incluir Z para expresar la profundidad, esta es una aproximación a la forma general, aunque se debe tomar en cuenta que no está contemplado el grosor de las paredes que para cálculos específicos es necesario.

Esta estructura a nivel macro ha servido para estudiar conjuntos de eventos en el espacio-tiempo de Minkowski, también aparece en superficies de energía de mecánica cuántica, por lo que analizar y comprender esta estructura proporciona herramientas para entender eventos a nivel microscópico (Naveira, 2007).

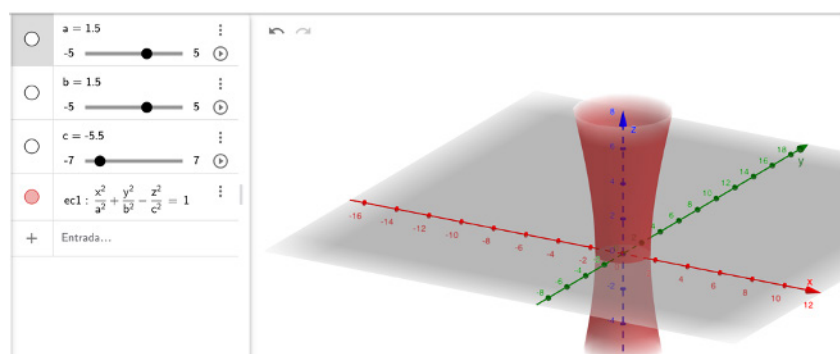
Después de revisar miles de objetos de esta clase se ha podido identificar varias botellas silbato que comparten rasgos geométricos formales, si bien no se ha podido encontrar hasta este momento de la investigación otro objeto con la misma configuración geométrica, podemos decir que hay varios artefactos que esperan ser analizados por lo que este estudio demuestra la presencia de métodos de precisión formal en la planificación y construcción de estos objetos por parte de los pueblos originarios del Ecuador (Figura 13).

Conclusiones

La botella silbato estudiada está hecha en cerámica, cuya intención fue utilizar al barro como material flexible y altamente maleable para conseguir la precisión simétrica

Figura 12. Gráfica fórmula cuadrática de lo que hoy conocemos como hiperboloide de una hoja en GeoGebra.

Figure 12. Graph of quadratic formula expressing a hyperboloid of sheet elaborated in GeoGebra.



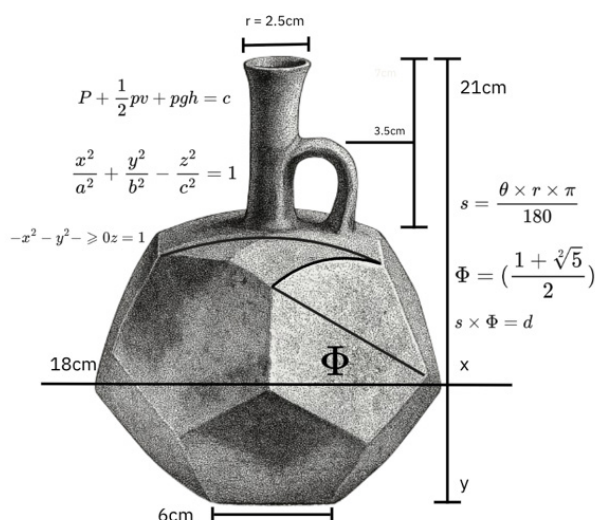


Figura 13. Resumen del análisis y descripción numérica del cuerpo de la botella silbato.

Figure 13. Abstract of the analysis and numerical description of the body of the whistle bottle.

en el ensamble de este poliedro con curvatura, para lo cual se requiere de un proceso metódico y orgánico en cuanto al diseño de la pieza. Por lo tanto, los resultados del estudio sugieren la existencia de una planificación previa y posiblemente, la utilización de un molde para alcanzar su simetría vertical. Cabe destacar, que no solo el diseño y función de esta botella requiere precisión, también se debe tomar en cuenta el proceso final de consolidación de la pieza, la cocción de la misma es un proceso que interfiere directamente con la composición química y estructural de la botella.

Los resultados del proceso de elaboración de este artefacto (maqueta) posibilitan concluir que es un producto que va más allá de la imaginación espontánea y la creatividad genuina, lo que desmitifica que los pueblos originarios del Ecuador carecían de conocimientos complejos y precisos para crear artefactos en los que se aplicaron principios que en la actualidad se sustentan desde elementos de análisis de la mecánica de fluidos, la hidráulica, aerodinámica, principios físicos de curvatura, compresión, la acústica, resonancia y geometría, poniendo en discusión el amplio conocimiento que se necesitó para aplicar en la organología ancestral.

De acuerdo con la evidencia expuesta, esta investigación constituye un aporte para la clasificación de los instrumentos registrados en Ecuador (Coba, 1981), en la categoría de instrumentos aerófonos; estos a diferencia de los aerófonos por resonancia (Pauta Ortiz, 2015: 127-128) son por compresión del fluido, siendo este estudio un aporte para el patrimonio sonoro del Ecuador. De igual forma, es un aporte para la clasificación por su morfología a la categoría de tipo geométrico y

catalogación de la figura del cuerpo de la botella dentro de los sólidos de revolución. Es preciso señalar que un alto porcentaje de las piezas que son exhibidas en los museos fueron creadas de manera que, actualmente, se aprecian únicamente de una manera frontal; sin embargo, los sólidos de revolución son una categoría que se puede apreciar en razón de 360°.

Además, en el contexto de los cálculos que se precisan en el cuerpo de este artefacto se puede determinar que el sistema de cálculo utilizado sugiere el uso de decimales, conviene profundizar en este punto que la evidencia que respalda esta afirmación está en el cálculo de los arcos de los pentágonos, al ser una desviación o curvatura mínima 0.419 cm si se redondearía esta cantidad a un número entero como el mínimo sería 0 por lo que la curvatura desaparecería, por el contrario si redondeamos a 1 la altura aumentaría deformando totalmente la pieza. Por esta razón, es importante dar a conocer los saberes y conocimientos de los pueblos originarios y hacer aproximaciones técnicas que posibiliten la reconstrucción y restauración adecuada de piezas que yacen en los repositorios de los museos en Ecuador, para ampliar su perspectiva de aprecio a estos artefactos como evidencias del pasado. Estos objetos han sido desvirtuados desde la hegemonía occidentalista que históricamente han sido consideradas como la única episteme que se debe impartir, de allí la importancia de investigar elementos del pasado con un enfoque transdisciplinar superando la visión fragmentada del conocimiento y así contar con contenidos suficientes para hacer efectivo el diálogo de saberes desde las distintas disciplinas del conocimiento.

El estudio presenta limitaciones que pudiesen ser revisadas en nuevas investigaciones. Un estudio más detallado de la parte técnica de la botella involucraría la utilización de herramientas tecnológicas como el uso de escáner, medición por láser, luz negra (UV) (Shepard, 1995), esto posibilitaría una aproximación más precisa de la pieza. De igual forma, se sugiere continuar la investigación en cuanto al sistema completo de la mecánica del sonido, para ello, consideramos pertinente someter a la pieza a estudios con rayos X para conocer la configuración interna de los conductos, las dimensiones más precisas de la cámara contenedora del fluido, la presencia de un resonador como se ha visto en otros aerófonos (Ayala-Esparza *et al.*, 2015) y la porosidad del material para verificar filtraciones. Por lo expuesto en este párrafo, el artículo invita a que en el futuro se conforme un grupo técnico multidisciplinar para darle un resultado más preciso sobre el valor de este artefacto patrimonial y su memoria material; de la misma manera, el estudio de esta pieza abre nuevas posibilidades de investigación hacia un análisis exhaustivo desde las miradas de la física, geometría diferencial, topología, matemáticas, química, musicología, pedagogía, arquitectura e ingeniería.

Referencias bibliográficas

- Alías Linares, L. J. (2004). *El significado geométrico de la curvatura: superficies de curvatura media constante*. Fundación Séneca / Quaderna Editorial.
- Anselmet, F., y Pierre-Olivier, M. (2021). *Acústica, aeroacústica y vibraciones*. ISTE Science Publishing.
- Ayala Esparza, M. A., Gallardo Carrillo, G. F., y Molina-Alarcon, M. (2019). *The song of air and water: Acoustic experiments with an Ecuadorian whistle bottle (c.900BC-100BC)*. Internet Archaeology, 52.
- Ayala Mora, E. (2008). *Resumen de historia del Ecuador* (13ª ed.). Corporación Editora Nacional.
- Ayala-Esparza, M., Gallardo Carrillo, G., y Molina-Alarcón, M. (2019). The song of air and water: Acoustic experiments with an Ecuadorian Whistle Bottle (c.900 BC–100 BC). *Journal of Archaeological Science: Reports*, 28: 102010.
- Ayala-Esparza, M., Polanco, M., y Espinosa, T. (2015). *Forma, estructura y función de la botella silbato*. Universidad Central del Ecuador.
- Ayala, M., Molina-Alarcón, M., y Gallardo, B. (2022). Técnicas ancestrales de elaboración cerámica aplicadas a la construcción artística de botellas silbato en Ecuador. *Arqueología Iberoamericana*, 50: 4–13.
- Basset Salom, L. (2013). *Estructuras laminares*. Universitat Politècnica de València.
- Coba, A. (1981). *Instrumentos musicales populares registrados en el Ecuador* (Vol I). Instituto Otavaleño de Antropología.
- Coxeter, H. S. M. (1974). *Regular complex polytopes*. Cambridge University Press.
- Crespo Toral, H. (1966). Nacimiento y evolución de la botella silbato. *Humanitas*, 6(1): 66–87.
- Currie, A., y Killin, A. (2019). From things to thinking: Cognitive archaeology. *Mind & Language*, 34(2): 263–279. <https://doi.org/10.1111/mila.12230>
- Estrada-García, A. (2020). The principles of complexity and their contribution to the teaching process. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 28(109): 1012-1032. <https://doi.org/10.1590/s0104-40362020002801893>
- Estrada-García, A., y Estrada, J. (2020). Pensar el conocimiento universitario desde la transdisciplinariedad. *593 Digital Publisher CEIT*, 5(5): 36-49.
- Ghyka, M. C. (1968). *El número de oro: Ritos y ritmos pitagóricos en el desarrollo de la civilización occidental. Tomo I: Los ritmos*. Editorial Poseidón.
- Holm, O. (2001). *La cultura Chorrera: formativo tardío aprox. 1500–500 a.C.* Ministerio de Cultura y Patrimonio.
- Idrovo Urigüen, J. (1987). *Instrumentos musicales prehispánicos del Ecuador: estudio de la exposición "Música milenaria"*. Museo Banco Central del Ecuador.
- Kenny, A. (2012). *A new History of Western philosophy*. Oxford University Press.
- Kepler, J. (2019). *Mysterium Cosmographicum*. Rising Tide Foundation. Trabajo original publicado 1569.
- López Sarda, M. (2016). Anotaciones a otra geometría de la proporción y la armonía. *Revista de Arquitectura*, 21(30): 74–90.
- Maor, E., y Jost, E. (2022). *Pentagons and pentagrams: An illustrated history*. Princeton University Press.
- Martín, A., y Granado, G. (2014). *El dodecaedro regular y el número phi*. Departamento de Ingeniería Gráfica, Universidad de Sevilla.
- Mata Gómez, A. (2022). *Estudio de la eficiencia energética en edificios residenciales*. Trabajo de Fin de Grado, Universidad Politécnica de Madrid.
- Museo Casa del Alabado. (2025). *Cultura Chorrera (950 a.C – 350 a.C): Botella Chorrera (objeto cerámico)*. Quito, Ecuador.
- Naveira, A. M. (2007). La curvatura de Riemann a través de la historia. *Miscelánea Matemática*, 44, 29-45.
- Pacioli, L. (2017). *De divina proportione: Opera a tutti gli'ingegni perspicaci e curiosi necessaria*. Paganino de 'Paganini. (Trabajo original publicado en 1509).
- Pauta Ortiz, P. (2015). *La música y las formas: un recorrido por la cosmovisión andina* (1ª ed., Colección

- Los Apus, núm. 5). Casa de la Cultura, Núcleo del Azuay.
- Polanyi, M. (2009). *The tacit dimension*. The University of Chicago Press. (Trabajo original publicado en 1966).
- Santaló, L. A. (1955). Sobre la fórmula de Gauss–Bonnet para poliedros en espacios de curvatura constante. *Revista de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires*, 20: 79–91.
- Segreto, T., Bottillo, A., Teti, R., Galantucci, L. M., Lavecchia, F., y Galantucci, M. B. (2017). Non-contact reverse engineering modeling for additive manufacturing of down scaled cultural artefacts. *Procedia CIRP*, 62: 481–486.
- Shepard, A. O. (1995). *Ceramics for the Archaeologist*. Carnegie Institution of Washington. (Originalmente publicado en 1956).
- Sörman, A., Noterman, A. A., y Fjellström, M. (2023). Fragmentation in archaeological context: Studying the incomplete. En A. Sörman y A. Noterman, M. (Ed.) *Broken Bodies, Places and Objects: New Perspectives on Fragmentation in Archeology* (pp.1-22). Taylor & Francis. <https://doi.org/10.4324/9781003350026>
- Spence, K. (2000). Ancient Egyptian chronology and the astronomical orientation of pyramids. *Nature* 408(6810): 320–324.
- Weisstein, E. W. (2008). *Johnson Solid*. *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html>
- YouPhysics Educación. (s. f.). *Efecto Venturi (Imagen o gráfico)*. YouPhysics. Recuperado de <https://www.youphysics.education/es/ecuacion-de-bernoulli/efecto-venturi/>
- Zenil, H. (2011). *Lo que cabe en el espacio: La geometría como pretexto para explorar nuestra realidad física y matemática*. Instituto de Física. Universidad Nacional Autónoma de México.