UNIVERSIDAD DE CUENCA
Facultad de Filosofía, Letras y
Ciencias de la Educación

# IV COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

## TOMO I

Universidad de Cuenca (UC)
Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas
(IREM-PUCP/ IREM-UNTUMBES)
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Comunidad de Educación Matemática de América del Sur (CEMAS)

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Facultad de Filosofía, Letras y
Ciencias de la Educación

# IV COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

## TOMO I

Universidad de Cuenca **(UC)**
Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas
**(IREM-PUCP/ IREM-UNTUMBES)**
Comité Interamericano de Educación Matemática **(CIAEM)**
Comunidad de Educación Matemática de América del Sur **(CEMAS)**

UNIVERSIDAD DE CUENCA
Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación
Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales

“IV COLOQUIO BINACIONAL SOBRE LA
ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA”

**INSTITUCIONES ORGANIZADORAS:**
Universidad de Cuenca
Universidad Nacional de Tumbes
Comunidad de Educación Matemática de América del Sur

**COMISIÓN ORGANIZADORA:**
Eulalia Calle P.
Patricio Guachún L.
Carlos Sabino E.

**COMITÉ EVALUADOR:**

Francisco Ugarte, Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP)
Ángel Ruiz, Comité Interamericano de Educación Matemática
Marco Jácome, Universidad de Cuenca

**Diseño e Impresión:**
Imprenta General de la Universidad de Cuenca
Tiraje: 300 ejemplares

**Derecho de Autor:** CUE-003985
**ISBN:** 978-9978-14-446-6

# INDICE

# Presentación

La educación ecuatoriana se ha caracterizado por limitar las actividades académicas a un salón de clases, ocasionando que poco o nada se conozca sobre el trabajo que nuestros docentes realizan a diario en el área de las matemáticas. Por este motivo, es necesario crear espacios de intercambio de las propuestas para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, para generar discusión y enriquecimiento a través del conocimiento de nuestras investigaciones y divulgar los resultados alcanzados, promoviendo las buenas prácticas docentes en nuestra sociedad.

Con este objetivo, se presenta una memoria del **IV Coloquio Binacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas**, organizado por la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación en la Universidad de Cuenca. En este evento, se ha visibilizado el interés de profesionales e investigadores por mejorar el aprendizaje de las ciencias exactas; actitud que se demuestra a través de los diferentes temas que componen este libro: la formación inicial y continua de profesores, el pensamiento matemático, la epistemología de las matemáticas y sus secuencias didácticas, las tecnologías educativas, las perspectivas socioculturales como la Etnomatemática, Sociología, Comunicación, en los diferentes niveles educativos.

Nuestro objetivo es contribuir con una serie de experiencias que favorezcan la actualización especializada de los docentes interesados de los diferentes niveles educativos del país y de formación continua del área de matemáticas. Además, buscamos el desarrollo de la capacidad crítica y creativa, al tiempo de compartir espacios pedagógicos que favorezcan el intercambio de resultados de investigaciones en el campo de la Educación Matemática.

Estamos seguros de que este es el inicio de una relación fructífera, para difundir la creatividad y el ingenio de nuestros maestros y estudiantes en formación, que solo buscan construir el conocimiento y desarrollar las destrezas en niños y jóvenes que requieren aprender matemáticas de una forma diferente.

Eulalia Calle P.

# El papel de la heurística en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática

**José Martínez Serra**
**Marco Vásquez Bernal**
**Yenis Cuétara Hernández**
**Jorge Cueva Delgado**
Universidad Nacional de Educación

**Ramiro Infante Roblejo**
Universidad de Granma, Cuba

## Resumen

Dado que la mayoría de los problemas a los que nos enfrentamos no pueden ser resueltos mediante algoritmos, deben emplearse procedimientos heurísticos para tener éxito. Hoy la Heurística es aplicada en varias ramas del saber y es entendida como la capacidad de un sistema para realizar innovaciones positivas para sus fines, es el arte y la ciencia del descubrimiento y la invención mediante la creatividad y el pensamiento lateral-divergente; de ahí la conveniencia del empleo de la Heurística en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas, viendo los procesos de formación, definición y caracterización de conceptos, así como la obtención, formulación y demostración de teoremas, como variantes de problemas.

Sin embargo, persisten dificultades de nuestros estudiantes ante la resolución de problemas, pues en las clases solo se plantean problemas solubles empleando recursos cuasialgorítmicos, a pesar de que existe una amplia gama de recursos heurísticos desconocidos por los docentes o que son empleados parcialmente. Por ello se plantea como objetivo contribuir al empleo eficiente de los recursos heurísticos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Este objetivo es cumplido satisfactoriamente con una muestra de 93 estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Básica de la UNAE, lo cual es corroborado cualitativa y cuantitativamente durante los ciclos S2018-I y S2018-II. Como conclusión, se afirma que la aplicación coherente de la Heurística durante la resolución de problemas, incrementa los saberes declarativos, procedimentales y actitudinales de los futuros docentes para abordar eficientemente el tratamiento didáctico de los problemas en sus clases.

**Palabras clave:** Heurística, recursos heurísticos, proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

***

## Introducción

El vocablo "heurística" o "eurística" proviene del griego y significa hallar, descubrir, inventar. En la actualidad, la Heurística es aplicada en varias ramas del saber y, en general, es entendida como la capacidad de un sistema para realizar de forma inmediata innovaciones positivas para sus fines. La capacidad heurística es un rasgo característico de los humanos desde cuyo punto de vista puede describirse como el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o divergente.

Como metodología científica, la heurística es aplicable a cualquier ciencia e incluye la elaboración de medios auxiliares, principios, reglas, estrategias y programas que faciliten la búsqueda de vías de solución a problemas; o sea, para resolver tareas de cualquier tipo para las que no se cuente con un procedimiento algorítmico de solución. Según Horst

Müller "Los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamiento que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes". Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en principios, reglas y estrategias.

Los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar —directamente— la idea de solución; posibilita determinar, por tanto, a la vez, los medios y la vía de solución. Dentro de estos principios se destacan la analogía y la reducción (modelización).

Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar, especialmente, los medios para resolver los problemas. Entre las reglas heurísticas que más se emplean están: separar lo dado de lo buscado, confeccionar figuras de análisis (esquemas, tablas, mapas), representar magnitudes dadas y buscadas con variables, determinar si se tienen fórmulas adecuadas, utilizar estructuras más simples, reformular el problema, etc.

Las estrategias heurísticas se comportan como recursos organizativos del proceso de resolución, que contribuyen especialmente a determinar la vía de solución del problema abordado. Existen dos estrategias: el trabajo hacia adelante, en el cual se parte de lo dado para realizar las reflexiones que han de conducir a la solución del problema y el trabajo hacia atrás, donde se examina primeramente lo que se busca y, apoyándose en los conocimientos que se tienen, se analizan posibles resultados intermedios de lo que se puede deducir lo buscado, hasta llegar a los dados.

Mediante el empleo de la heurística, el maestro no informa a los alumnos los conocimientos terminados, sino que los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, mediante el trabajo independiente o el cooperado.

Algunas de las ventajas del empleo de la heurística en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la Matemática son: contribuir al logro de la independencia cognoscitiva y al trabajo cooperativo real, permitir la integración armónica de los nuevos conocimientos con los ya asimilados, favorecer el desarrollo de

— Las operaciones intelectuales: comparación, análisis, abstracción, síntesis, generalización, clasificación, etc.

— Las formas de trabajo propias de la ciencia matemática, tales como variación de condiciones, búsqueda de relaciones y dependencias, analogías, etc.

— Las capacidades mentales: intuición, productividad, originalidad, creatividad, etc.

Sin embargo, a pesar de las potencialidades que posee el empleo de la Heurística en el PEA de la Matemática, se han podido constatar una serie de **necesidades didácticas** durante el planteamiento y la resolución de problemas en las clases de matemática, entre las que se encuentran:

— Dificultades de nuestros estudiantes ante el planteamiento y la resolución de problemas.

— En general, no existen procedimientos algorítmicos para el planteamiento y la resolución de problemas, por lo que se requieren procedimientos heurísticos en ambos procesos.

— En general, solo se plantean conjuntos de problemas que se resuelven empleando recursos cuasialgorítmicos semejantes; de ahí la gran limitación que presenta el tratamiento didáctico de los problemas que se plantean.

— Existe una amplia variedad de recursos heurísticos que no son conocidos por los docentes y solo son empleados de manera intuitiva, sin una incorporación metacognitiva que facilite su empleo.

Para contribuir a resolver estas dificultades detectadas, se plantea como **objetivo general** de la puesta en práctica de este proyecto, contribuir al empleo eficiente de los recursos heurísticos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del planteamiento y la resolución de problemas.

## Materiales y métodos

La aplicación de los materiales y métodos está prevista durante en el S2018-II en los tres paralelos del énfasis de Matemáticas del 8$^{vo}$ ciclo de la carrera Educación Básica.

## Metodologías, técnicas, instrumentos y recursos didácticos

Como parte de la Metodología Heurística se han empleado:

— Medios auxiliares heurísticos, los cuales favorecen la organización de la información que se ofrece en un problema (datos, incógnitas y sus relaciones) y la inducción a posibles planes de solución; entre ellos, Figuras ilustrativas, Esbozos, Tablas, Organigramas, Mapas conceptuales, Árboles de datos, Mementos (resúmenes organizados…), etc.

— Procedimientos heurísticos, los cuales favorecen la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes, entre ellos: Principios, Reglas y Estrategias heurísticas.

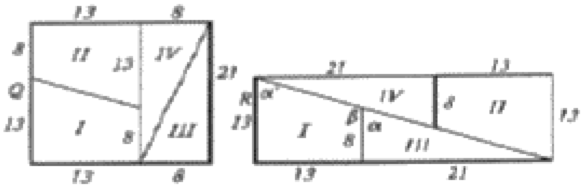
## Ejemplos de empleo de los medios auxiliares heurísticos

**Problema 1:** De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, después la mitad del resto y aún quedan 1200 litros de agua. ¿Qué capacidad tiene el depósito?

**Ideas de empleo:** Aunque este problema se resuelve fácilmente operando con fracciones o planteando una ecuación resulta más fácil haciendo una figura que al dividirla en partes se obtiene la solución con una simple operación mental.

**Problema 2:** ¿Un cuadrado de lado 21 cm tiene la misma área que un rectángulo 34 x 13 cm?

El cuadrado lo descomponemos en dos trapecios I y II de las dimensiones indicadas y en dos triángulos III y IV. Con los cuatro trozos componemos el rectángulo. Y sin embargo $21^2 \neq 34 \bullet 13$



**Ideas de empleo:** Al utilizar figuras para resolver problemas tenemos el peligro de llegar a una solución falsa al razonar sobre ella, por lo que es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

— Una figura inexacta puede sugerir una solución errónea.

— Una figura debe expresar relaciones lógicas.

— Las figuras no deben incluir ninguna relación que no esté indicada en el enunciado del problema.

**Ejemplos de empleo de los principios heurísticos:**

— Analogía: Utilización de semejanzas de contenido o de forma con respecto a otros problemas conocidos. Tres direcciones:

— Para el descubrimiento de la formulación de una proposición. **Ejemplo:** Al obtener la fórmula del volumen de un cono comparándolo con el volumen de un cilindro, puede realizarse el manejo de material concreto análogamente a como se hizo con la pirámide respecto al prisma.

— Durante el descubrimiento de la demostración de una proposición. **Ejemplo:** Para demostrar los productos notables, se utilizan propiedades análogas en cada caso.

— Durante el descubrimiento de la vía de solución de un problema. **Ejemplo geométrico:** En un problema geométrico donde se requiera la determinación de la longitud de una lado o la amplitud de un ángulo donde se necesite utilizar la igualdad o semejanza de dos triángulos, análogamente a como se han resuelto varios problemas anteriores. **Ejemplo algebraico:** Al descomponer en factores: $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy$, debe resolverse análogamente a ejercicios donde se hayan realizado agrupamientos convenientes.

Reducción: Reducción del problema a otro(s) más sencillo(s).

— Reducción del problema a otro ya resuelto. Ejemplo algebraico: Al resolver las ecuaciones cuadráticas, estas pueden reducirse a dos ecuaciones lineales, mediante la descomposición factorial.

— Recursión. Ejemplo aritmético: Al calcular números combinatorios, puede recurrirse a factoriales cómodos, sin calcular estos completamente, logrando su simplificación oportuna.

— Descomposición del problema en subproblemas. Ejemplo: Halla los valores naturales de las variables, tales que: $\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}} = \frac{7}{10}$

— Diferenciación de casos. Ejemplo: para determinar el área de un triángulo, diferenciando los casos de la altura.

— Reducción de una proposición a otra equivalente. **Ejemplo:** Cuando se demuestra una proposición mediante el contrarrecíproco… (teorema de la desigualdad triangular).

— Demostración de refutaciones por contraejemplo. **Ejemplo:** Demuestre la veracidad o falsedad de las sumas finitas:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 3)/2$ o

— Modelación: Buscar una interpretación (un modelo) del problema dado en otro dominio, con el objetivo de aplicar las leyes en el nuevo dominio para resolverlo, y posteriormente, hacer la interpretación de la solución obtenida en el modelo original. Ejemplo: Deducción del trinomio cuadrado perfecto mediante un problema geométrico sencillo.

— Inducción: a partir de casos particulares llegar a una formulación general. Ejemplo: Obtención del teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

— Movilidad: poner en movimiento uno o varios datos del problema para determinar ideas que conducen a la solución. Ejemplo: Comportamiento de las pendientes de rectas verticales,…, o en la división por cero.

— Consideración de casos especiales y casos límites. Ejemplo: una función que sea par e impar a la vez.

**Ejemplos de empleo de las reglas heurísticas:** Operaciones a realizar en la búsqueda de la vía y los medios matemáticos para resolver un problema. Pueden ser generales, cuando se aplican para la búsqueda de la idea de solución para una gran variedad de problemas; o especiales, cuando se aplican a un tipo específico de problemas.

— Ejemplo de reglas generales: impulsos que se pueden dar cuando se aplica el Modelo de Polya durante la resolución de problemas.

— Ejemplo de reglas especiales: para la determinación de longitudes de segmentos o amplitudes de ángulos en geometría, se pueden buscar parejas de triángulos iguales o semejantes.

### Estrategias heurísticas

- — Trabajo hacia adelante: Se parte de los datos y se deduce a partir de ellos lo que se busca, transc $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$. s intermedios que permiten elaborar, ejecutar el plan de solución y obtener el resultado esperado.
- — Trabajo hacia atrás: Se parte de lo que se busca y, apoyándose en los conocimientos que se tienen, se analizan los resultados intermedios, hasta llegar a la forma de obtener lo que se busca a partir de los datos. En el caso de las demostraciones suele obtenerse una proposición verdadera.
    - — Ejemplo: Demuestre que en todo triángulo, el semiperímetro es mayor que la longitud de cada lado (puede hacerse por cualquier vía, sin embargo, el trabajo hacia atrás es más fructífero).
    - — Ejemplo: Determinar el área de un trapecio de bases “a” y “b” y altura “h” (debe hacerse con el trabajo hacia adelante).

## Resultados

Durante las clases de Matemática IV en el 8$^{vo}$ ciclo de la carrera “Licenciatura en Educación General Básica” del itinerario Matemáticas se han realizado acciones didácticas que tributan a un adecuado empleo de la Heurística durante el proceso de enseñanza- aprendizaje de la matemática.

- — Reflexiones críticas sobre el concepto de “problema”.
- — Búsqueda bibliográfica sobre modelos para el planteamiento y la resolución de problemas.
- — Determinación del papel de la resolución de problemas en la educación matemática.
- — Reflexiones críticas sobre modelos para la resolución de problemas.

— Reflexiones críticas sobre modelos para el planteamiento de problemas.

— Creación de problemas de los tres bloques curriculares de la EGB donde se empleen los diferentes modelos para el planteamiento y la resolución de problemas.

— Reflexiones críticas sobre los medios y procedimientos algorítmicos y cuasi algorítmicos para la resolución de problemas.

— Reflexiones críticas sobre los medios y procedimientos heurísticos para la resolución de problemas.

— Organigrama sobre los recursos heurísticos.

— Reflexiones críticas sobre las formas de empleo del planteamiento y la resolución de problemas en el PEA de la matemática.

— Organigrama sobre estas formas de empleo.

— Ejemplificación/creación de problemas de los tres bloques curriculares de la EGB donde se evidencien las formas de empleo de la Resolución de Problemas.

— Reflexiones críticas sobre la Evaluación inclusiva y seguimiento de alumnos durante el planteamiento y la resolución de problemas en el PEA de la matemática.

— Reflexiones críticas sobre las prácticas existentes en los concursos y olimpíadas de matemática.

— Ejemplificación/creación de problemas de los tres bloques curriculares de la EGB aplicables a los concursos y olimpíadas de matemática.

Por razones de espacio, no se incluyen los resultados cuantitativos obtenidos por los estudiantes; sin embargo, a partir de su desempeño en las clases de Matemática IV, puede arribarse a la conclusión:

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, se puede arribar a la conclusión de que la aplicación coherente de la Heurística durante la resolución de problemas, incrementa los saberes declarativos, procedimentales y actitudinales de los futuros docentes para abordar eficientemente el tratamiento didáctico de los problemas en sus clases.

**Referencias bibliográficas:**

Álvarez, F. & otros. (2017). *Modelo Pedagógico de la UNAE*. Dirección Editorial UNAE. Págs. 9-12.

Beltrán, J. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Case, R., Hayward, S., Lewis, M. y Hurst, P. (1988). Toward a neo-Piagetian theory of cognitive and emotional development. *Developmental Review*, 8(1), 1-51.

Coll, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (comps.), *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (pp. 157-186). Madrid: Alianza Editorial.

Junta Académica de la UE "Francisca Dávila de Muñoz". (2016). Planificación curricular institucional 2016-2020. Aprobada por Coordinación de Educación Zonal 6 - auditoría / asesoría educativa.

Novak, J. D. (1982). *Teoría de la educación*. Madrid: Alianza Editorial.

Novak, J. D. (1998). *Conocimiento y aprendizaje*. Madrid: Alianza Editorial.

Nuthall, G. (2000). El razonamiento y el aprendizaje del alumno en el aula. En B. J. Biddle, T. L. Good y I. F. Goodson (Eds.), *La enseñanza y los profesores. 2: La enseñanza y sus contextos* (pp. 19-114). Barcelona: Paidós.

Serrano, J. M. & Pons Parra, R. M. (2011). El Constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. ISSN: 1607-4041. Vol. 13, Núm.

1. Consultado el día 25 del mes de septiembre del año 2018 en: http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html. México D.F.

___________ (2008). La concepción constructivista de la instrucción: Hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 38, 681-712.

# “Certamen de matemáticas”
# Para la Educación Básica y el Bachillerato en la Zona 6

**Marco Vásquez Bernal**
**José Martínez Serra**
**Germán Panamá Criollo**
**Arelys García Chávez**
**Rosa Troya Vásquez**
Universidad Nacional de Educación

## Resumen

El proyecto que se presenta recoge las bases del “I Certamen de Matemáticas” a desarrollarse en la Zona 6, auspiciado y organizado por la Universidad Nacional de Educación (UNAE) y la Coordinación Zonal de Educación, donde participarán las Unidades Educativas de la Zona 6.

Se recoge la concepción a la que se aspira para lograr que los concursos matemáticos sirvan como estimulación y motivación para el aprendizaje de las matemáticas en el alumnado de la Educación General Básica, de tal manera que la vía correcta para la resolución de problemas no surja de manera aislada en un solo estudiante de la élite del alto rendimiento, sino que solo el trabajo mancomunado en equipo sea el que posibilite el éxito ante un problema o un conjunto de problemas. Se presentan las actividades realizadas hasta el momento y las que se ejecutarán durante las tres etapas diseñadas.

**Palabras clave:** Certamen de Matemáticas, proyecto la matemática en la vida, prueba individual, prueba colectiva.

## Introducción

> Lo que el profesor dice en clases no carece de importancia, pero lo que los alumnos piensan es mil veces más importante. Las ideas deben nacer en la mente de los alumnos y el profesor debe actuar como una comadrona…
>
> De la Fuente, 2009.

En general, el trabajo con los Concursos de Matemáticas, se ha visto como una labor elitista, donde solo los estudiantes con mejor rendimiento académico en matemáticas tienen la posibilidad de participar en las acciones relativas a esta actividad, que van desde el proceso de selección de los concursantes, su entrenamiento, hasta la participación en los certámenes competitivos.

Este trabajo se ha caracterizado por el desarrollo del individualismo en la solución de problemas matemáticos complejos, y solo avanzan exitosamente en el movimiento de los concursos de matemáticas, aquellos que más entrenamiento individual han recibido y que tienen mayores dotes y estrategias para la resolución de problemas, de tal manera que solo triunfan aquellos que tienen el chispazo mental o idea feliz que los conduce exitosamente a la solución.

Sin embargo, teniendo en cuenta la misión, los ejes y los objetivos de trabajo declarados en el Modelo Pedagógico de la UNAE y los objetivos curriculares declarados por el MinEduc dadas algunas experiencias internacionales, existen formas de aprovechar el trabajo cooperativo en equipos, para lograr que los concursos matemáticos sirvan como estimulación y motivación para el aprendizaje de las matemáticas en el alumnado de la Enseñanza General; de tal manera, que la vía correcta para la resolución de problemas no surja de manera aislada en un solo estudiante, sino que solo el trabajo mancomunado en equipo sea el que posibilite el éxito ante un problema o un conjunto de problemas.

El objetivo general que se propone es contribuir al desarrollo de la motivación y de las competencias matemáticas en los estudiantes de la Educación General Básica y Bachillerato en la Zona 6, por medio de un sistema de trabajo desde cada uno de los paralelos de la EGB y el Bachillerato, que permita llevar a cabo la selección de los equipos, su preparación y participación en las etapas competitivas, suscitando un trabajo cooperativo.

**Materiales y métodos**

A continuación, se relacionan las reuniones iniciales de Coordinación y Preparación del Certamen, cuyos resultados son procesados utilizando la metodología cualitativa.

— Reuniones de la Comisión de Innovación de la UNAE.

— Reuniones del Grupo de Investigación “Eureka 4i”, donde está inscrito el proyecto.

— Reunión de coordinación con el Rector de la UNAE Dr. Freddy Javier Álvarez González, el 11 de septiembre de 2018 en su oficina, para la firma del Oficio dirigido a la Coordinación Zonal de Educación con las Bases del Certamen y el Cronograma de Reuniones y Etapas del mismo.

— Reunión con funcionario de la Coordinación Zonal 6 de Educación, MSc. Pablo de la Cadena, el 10 de octubre de 2018.

— Reunión con coordinadores distritales de 8 Distritos de Educación de la Zona 6, el 19 de octubre de 2018, en el Auditorio de la Coordinación Zonal 6 de Educación.

— Primera Reunión con 47 Representantes de las 34 Unidades Educativas que aprobaron su presencia en el Certamen, el 9 de noviembre de 2018 en el Auditorio de la UNAE.

— Segunda Reunión con 42 Representantes de las 34 Unidades Educativas que aprobaron su presencia en el Certamen, el 23 de noviembre de 2018 en el Auditorio de la UNAE.

Durante las reuniones efectuadas se utilizaron los métodos, técnicas e instrumentos:

— Método expositivo por los profesores Coordinadores del Proyecto: phd. Marcos Vinicio Vásquez Bernal y phd. José Enrique Martínez Serra, expresando las bases del Certamen y el Cronograma.

— Entrevistas grupales a los participantes para indagar sobre la factibilidad de aplicar el Certamen en sus Unidades Educativas.

— Lluvia de ideas de los participantes para valorar la pertinencia de las actividades propuestas y realizar las adecuaciones necesarias.

— Prueba de Contenidos a los participantes en la segunda reunión con los representantes de las unidades educativas, como pilotaje de los tipos de problemas que se pretenden aplicar durante cada etapa.

**Resultados y discusiones**

Los resultados obtenidos han sido:

— Durante las reuniones de la Comisión de Innovación de la UNAE y las reuniones del Grupo de Investigación "Eureka 4i", donde está inscrito el proyecto, se realizaron las primeras precisiones sobre la concepción general del Certamen, los niveles a incluir en la primera edición del Certamen, las etapas competitivas, las características del Proyecto y las Pruebas Individuales y Colectivas, los contenidos matemáticos a abordar en los problemas planteados, la posible conformación del Comité Organizador.

— Durante la reunión de coordinación con el Rector de la UNAE Dr. Freddy Javier Álvarez González, el 11 de septiembre de 2018 en su oficina, se logró la firma del Oficio dirigido a la Coordinación Zonal de Educación con las Bases del Certamen y el Cronograma de Reuniones y Etapas del mismo.

— Durante la reunión con el Funcionario de la Coordinación Zonal 6 de Educación, MSc. Pablo de la Cadena, el 10 de octubre de 2018, se explicaron las Bases del Certamen y se acordó la citación y celebración de la Reunión con Coordinadores Distritales.

— Durante la reunión con Coordinadores Distritales de 8 Distritos de Educación de la Zona 6, el 19 de octubre del 2018, en el Auditorio de la Coordinación Zonal 6 de Educación se explicaron las Bases del Certamen y se acordó la selección de las Unidades Educativas que participarán en el Certamen y sus Representantes, a la vez que se propuso la citación y celebración de las reuniones con dichos representantes.

— Durante las dos reuniones con Representantes de las 34 unidades educativas que aprobaron su presencia en el certamen, se debatieron cada uno de los aspectos del mismo y se tomaron los acuerdos derivados del debate colectivo.

Producto de la discusión de todos los aspectos debatidos en cada una de las instancias respectivas, se han arribado a los siguientes acuerdos:

## I. Categorías para la participación en el CERTAMEN:

a. **PRIMERA CATEGORÍA**: Los alumnos de 10$^{mo}$ año de Educación Básica Superior de los establecimientos educativos de la Zona 6 de Educación.

b. **SEGUNDA CATEGORÍA:** Los alumnos de 3$^{er}$ año de Bachillerato de los establecimientos educativos de la Zona 6 de Educación.

**II. Banco de Problemas: Cada profesor enviará al menos 12 problemas al Banco (6 de cada categoría; 3 para la prueba individual y 3 para la prueba colectiva), hasta conformar un total de 200, el cual se dará a conocer una quincena antes de la fecha del certamen.**

a. Se sugiere la entrega de la mayor cantidad de dichos problemas para la reunión del viernes 23 de noviembre, aunque pueden irse entregando otros durante los meses de noviembre y diciembre.

b. Las preguntas para la prueba individual son semejantes a las de las olimpíadas y concursos tradicionales, mostradas en la exposición.

c. Las preguntas para la prueba colectiva son diferentes a las de las olimpíadas y concursos tradicionales, mostradas en la exposición, las cuales se caracterizan por la necesidad de que, para ser resueltas de forma eficiente, requieren del trabajo colaborativo y cooperativo entre los miembros del equipo.

**III. Problemas a elegir para los temarios del Certamen: El Comité Organizador tiene la potestad de elegir algunos de los problemas del Banco u otros que considere pertinentes para las Pruebas Individuales y Colectivas del Certamen.**

**IV. Conformación de los equipos (noviembre 2018):**

a. En cada uno de los paralelos de 10mo. grado y de 3er. año de bachillerato se conformarán equipos heterogéneos de 4 o 5 miembros.

b. Los criterios propuestos para la conformación de los equipos son:

i. La aleatoriedad, según el orden alfabético de los estudiantes del paralelo.

ii. Solo se puede violar el criterio anterior, en el caso que un mismo equipo caigan dos o más estudiantes con necesidades educativas especiales, los cuales deben redistribuirse por los demás equipos.

c. La cantidad de equipos, en dependencia de la matrícula se muestra en la tabla:

| Matrícula paralelo | Cant. equipos de 4 alumnos | Cant. equipos de 5 alumnos |
|---|---|---|
| **21** | 4 | 1 |
| **22** | 3 | 2 |
| **23** | 2 | 3 |
| **24** | 1 | 4 |
| **25** | 0 | 5 |
| **26** | **4** | **2** |
| **27** | **3** | **3** |
| **28** | **2** | **4** |
| **29** | **1** | **5** |
| **30** | **0** | **6** |
| **31** | **4** | **3** |
| **32** | **3** | **4** |
| **33** | **2** | **5** |
| **34** | **1** | **6** |
| **35** | **0** | **7** |
| **36** | **4** | **4** |
| **37** | **3** | **5** |
| **38** | **2** | **6** |
| **39** | **1** | **7** |
| **40** | **0** | **8** |

## V. ETAPA 1: Certamen de Base

a. Se les orientará la realización del Proyecto “La Matemática en la Vida” (del 1 de diciembre de 2018 al 31 de enero de 2019), en una o varias modalidades de prosa, poesía, pintura, escultura, maquetas, audiovisuales, entre otras.

b. Este proyecto será elaborado durante dos meses por los miembros del equipo. En enero de 2019, el profesor de Matemática del paralelo recepcionará los proyectos realizados y los calificará en conjunto con los profesores de la escuela en base a 30 puntos y según sus criterios: estética, creatividad, originalidad, rigor matemático, envergadura de la presencia de la matemática en la vida.

c. Posteriormente se aplicará la Prueba Escrita de la Etapa 1 (el viernes 1ro de febrero de 2019), en dos momentos:

   **1. Prueba Individual** a todos los miembros del equipo, donde se aplican problemas seleccionados del Banco o elaborados por el Comité Organizador del Certamen.

   — Los estudiantes pueden llevar sus propios instrumentos de medición (regla, compás, graduador). No se permite el uso de calculadoras.

   — Esta prueba será aplicada y calificada en base a 30 puntos por profesores de una institución coevaluadora, según la rúbrica que envíe el Comité Organizador.

   — La nota del equipo en esta prueba será el promedio de las notas individuales obtenidas por sus miembros (en base a 30 puntos).

   — Las preguntas para esta prueba son **semejantes** a las de las olimpíadas y concursos tradicionales, mostradas en la exposición.

   2. Prueba Colectiva a todos los equipos, donde se aplican problemas seleccionados del Banco o elaborados por el Comité Organizador del Certamen, que requiera del trabajo cooperativo y colaborativo entre los miembros de los equipos para ser resuelto con eficiencia.

   — Esta prueba será calificada en base a 40 puntos por el profesor, según la rúbrica que envíe el Comité Organizador.

— La nota del equipo en esta prueba será única.

— Las preguntas para esta prueba son diferentes a las de las olimpíadas y concursos tradicionales, mostradas en la exposición, las cuales se caracterizan por la necesidad de que, para ser resueltas de la forma más eficiente, requieren del trabajo colaborativo y cooperativo entre los miembros del equipo.

d. Finalmente, la nota de cada equipo (en base a 100) será la suma de las notas: Proyecto (en base a 30) + Prueba Escrita Individual (en base a 30) + Prueba Escrita Colectiva (en base a 40).

e. Como resultado final de esta Etapa se tendrá un equipo ganador en cada paralelo.

f. La institución decidirá las formas de estimulación de estos estudiantes.

## VI. ETAPA 2: Certamen de Escuelas (a efectuarse el viernes 8 de marzo de 2019)

a. En esta etapa participan los equipos ganadores por paralelos de la Etapa 1.

b. Se aplicará la Prueba Escrita de la Etapa 2 en cada escuela en marzo de 2019, que consta de los dos momentos descritos en la Etapa 1.

c. Como resultado de esta Etapa se tendrán dos equipos ganadores en cada institución.

d. La institución decidirá las formas de estimulación de estos estudiantes.

## VII. ETAPA 3: Certamen Zonal (a efectuarse el viernes 26 de abril de 2019)

a. En esta etapa participan los equipos ganadores por escuelas de la Etapa 2.

b. Se aplicará la Prueba Escrita de la Etapa 3 en abril de 2019 en la UNAE, que consta de los dos momentos descritos en las Etapas 1 y 2.

c. Se realizará la exposición de los proyectos de los equipos participantes mediante técnicas participativas en los mismos escenarios donde tuvo lugar la Prueba Escrita.

d. Como resultado final de esta Etapa se tendrán dos equipos ganadores a nivel Zonal, uno de cada nivel, y tantas Menciones Honoríficas como considere el Comité Organizador.

e. La UNAE realizará la estimulación de los estudiantes de los equipos ganadores y la difusión de estos resultados en los Medios de Difusión Masiva.

**VIII. Los contenidos sobre los que tratarán los problemas serán:**

a. Para la PRIMERA CATEGORÍA (incluye los contenidos de 8vo y 9no grado y los que han sido objetos de evaluación en la primera parte del 10mo grado).

b. Para la SEGUNDA CATEGORÍA (incluye los contenidos expresados en la primera categoría, los contenidos de 1ro y 2do de Bachillerato y los que han sido objetos de evaluación en la primera parte del 3ro de Bachillerato).

## Conclusiones

Dadas las actividades realizadas hasta el momento con vistas al I Certamen de Matemáticas y los acuerdos derivados de las mismas, se puede arribar a las siguientes conclusiones:

— Se han realizado varias actividades pertinentes para el aseguramiento del “I Certamen de Matemáticas”, que han contado con el apoyo de la UNAE, la Coordinación Zonal de Educación y las Unidades Educativas comprometidas.

— Se han planteado opciones para el perfeccionamiento de algunas actividades, que serán tenidas en cuenta antes del desarrollo de la ETAPA 1 del Certamen.

**RECOMENDACIONES**

Dadas las actividades realizadas hasta el momento con vistas al I Certamen de Matemáticas y los acuerdos derivados de las mismas, se proponen las siguientes recomendaciones:

— Ejecutar las Etapas 1, 2 y 3 previstas para el aseguramiento del “I Certamen de Matemáticas”.

— Tener en cuenta las opciones para el perfeccionamiento de algunas actividades antes del desarrollo de la ETAPA 1 del Certamen.

**Referencias bibliográficas:**


De la Fuente Martínez, C. (2009). Modelos matemáticos, resolución de problemas y proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. En Revista: *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas. Aulas de Verano*. España. Estudios Gráficos Europeos S. A. ISBN 978-84-3694766-3, pp. 123-154.

Goñi Zabala, J. (1997). 3-2 ideas clave. *El desarrollo de la competencia matemática*. Editorial Grao.

PISA (2003). Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas. INECSE.

NCTM. (2005). Principios y Estándares para la Educación Matemática.

# Reflexión didáctica en formación inicial de docentes sobre la complejidad de las nociones de combinatoria

**Eulalia Calle Palomeque**
**Erika Parra Mora**
**Patricia Paucar Jara**
Universidad de Cuenca

**Resumen**

En el presente trabajo se exponen varias tareas que han sido diseñadas para analizar la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, cuando resuelven problemas de combinatoria. De esta manera, se puede evaluar la comprensión que tienen los participantes de este tópico. Por otra parte, también se pretende analizar de qué manera estos futuros profesores pueden explicar las dificultades que han tenido en la resolución de las tareas, mismas que se han diseñado tomando en cuenta las investigaciones sobre didáctica de la combinatoria, buscando que sean una muestra representativa de los problemas que se resuelven por combinatoria. Asimismo, se detalla el análisis ontosemiótico de cada una de las tareas propuestas, lo cual da evidencia de la red de objetos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas de combinatoria. El resultado de este estudio refleja, con relación a la comprensión, que los participantes presentan una comprensión limitada ya que no pueden resolver una muestra representativa de problemas. Con relación al análisis de la actividad matemática, sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

**Palabras clave:** Reflexión didáctica, Enfoque ontosemiótico, configuración epistémica, Teoría combinatoria.

## Introducción

Los futuros profesores en Formación Inicial tienen que desarrollar la competencia de reflexión sobre su práctica docente, para lo cual necesitan, entre otras, herramientas para el análisis de la actividad matemática. En Rubio (2012) se concluye que, si los profesores no son competentes en el análisis de prácticas, procesos y objetos matemáticos (actividad matemática), no lo serán en la evaluación de competencias matemáticas de sus alumnos. Dicho resultado, nos señala una de las competencias que deben desarrollar los futuros profesores de matemáticas: la competencia de análisis de la actividad matemática.

Este tipo de análisis es importante en la formación de los profesores, pero también es un tipo de análisis que presenta dificultades para los profesores y futuros profesores. Por ejemplo, en Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) se hace una revisión de la investigación empírica realizada sobre los profesores de matemáticas y se concluye que estas investigaciones muestran que los profesores tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (y su potencial educativo) que proponen a sus alumnos.

Con relación a la exposición de la actividad matemática, en este trabajo, nos propusimos dos objetivos:

1) Realizar el análisis de la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales: Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, cuando resuelven problemas de combinatoria.

2) Contrastar la manera como los futuros profesores exponen las dificultades que tienen para resolver los problemas de combinatoria.

Después de esta introducción, donde se presentan los objetivos de la investigación, en la siguiente sección se explican algunos constructos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) que han sido las herramientas teóricas utilizadas en esta investigación. A continuación, se explica la metodología y el análisis de los datos. Se finaliza con las conclusiones obtenidas.

## Marco teórico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha desarrollado el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Pino-Fan, Font & Breda, 2017). En dicho modelo se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica, siendo el núcleo fundamental de esta última (Breda, Pino-Fan & Font, 2017): diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Para poder desarrollar esta competencia el profesor necesita, por una parte, conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otra, precisa conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones. En este trabajo nos centraremos, sobre todo, en esta última.

La competencia de análisis e intervención didáctica está formada por diferentes subcompetencias (Breda, Pino-Fan & Font, 2017): 1) subcompetencia de análisis de la actividad matemáitca; 2) subcompetencia de análisis y gestión de la interacción y de su efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes; 3) subcompetencia de análisis de normas y metanormas; y 4) subcompetencia de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción. En este trabajo nos focalizamos en la primera subcompetencia.

En el área de educación matemática no hay un paradigma que nos diga cómo se debe realizar el análisis de la actividad matemática. En el modelo CCDM se asume que las herramientas teóricas del EOS permiten dicho análisis en términos de prácticas, objetos y procesos matemáticos. Con estas nociones teóricas, cuando los significados son entendidos de manera pragmática en términos de prácticas, se puede responder en un primer momento a preguntas del tipo: ¿Cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos que se quieren enseñar? ¿Cómo se articulan entre sí? En un segundo momento se pueden analizar los objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas permite comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Por tanto, el profesor de matemáticas debe conocer la idea de configuración de objetos primarios y procesos activada en una práctica matemática y ser capaz de usarla de manera competente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este trabajo hemos utilizado fundamentalmente la herramienta *configuración de objetos primarios*. En el EOS se ha introducido una tipología de objetos matemáticos primarios: situaciones/problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos objetos matemáticos primarios están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce con el nombre de configuraciones. Estas pueden ser de tipo epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Así, para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e. g., plantear y resolver un problema de combinatoria), vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto que acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones/problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulados en la configuración de la Figura 1 (Font & Godino, 2006, p. 69).

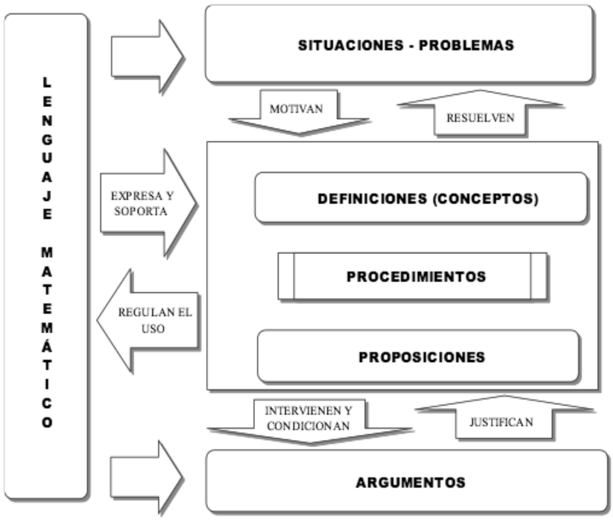



*Figura 1*

## Metodología

Para la recolección de los datos, se implementó un dispositivo que consistió en que dos futuras profesoras, tutorizadas por la primera autora de este documento, en su Trabajo de Titulación (Parra & Paucar, 2018) confeccionaran una muestra de problemas que fuese representativa del tipo de problemas que se pueden resolver con las nociones y procedimientos de la combinatoria.

Se confeccionaron tres problemas de combinatoria; dos de ellos muy elementales, es decir, cuya solución se puede encontrar mediante la aplicación de una única operación, y de un problema compuesto en el que se necesita más de una operación. Los problemas propuestos están contextualizados a la realidad universitaria y en general a la del país.

Los contenidos necesarios para la resolución de los tres problemas fueron: permutación, permutación con repetición, variación y combinación. Esta selección se hizo con la finalidad de que se contemplasen los modelos básicos de los problemas combinatorios: selección, colocación y partición. Se trataba de tener una muestra representativa de los diferentes tipos de problemas que se resuelven con estas técnicas de contar (no se contempla, el caso de la descomposición de un número natural en sumandos) (Batanero, Godino y Pelayo-Navarro, 1994). A continuación, siguen los enunciados de los tres problemas:

*Problema 1*: En una reunión de viejos amigos de la Universidad de Cuenca, se encuentran Viviana, Diego, Richard, Leonel, Ximena y Catalina. Se proponen ir al cine a disfrutar de una película. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en forma lineal si se desea que queden alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre)?

*Problema 2*: Por el feriado de la Fundación de Cuenca, Ana con sus siete compañeros deciden viajar a la parte costera del Ecuador llevando para ello dos autos. Si deciden ir cuatro en cada auto, ¿de cuántas formas pueden viajar si solo tres de los compañeros tienen licencia de conducir?

*Problema 3:* Un grupo de seis amigos, Lucía, Rodrigo, Nicolás, Humberto, Ximena y Miguel, tienen que realizar tres trabajos diferentes: Pedagogía, Mecánica y Estadística. Para realizarlo deciden dividirse en tres grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?

**Tabla 1**

Modelos y técnicas combinatorias de los problemas

| Problema | Modelo Combinatorio | Técnica de conteo |
|---|---|---|
| **1** | **Colocación** | Permutación simple |
| **2** | **Partición** | Variación y Permutación simple |
| **3** | **Partición** | Permutación con repetición |

Es importante mencionar que, en el Problema 1, se plantearon preguntas directrices para identificar los conceptos de orden y repetición, además de los principios de multiplicidad y adición, mientras que en los dos siguientes solamente se presentaron los enunciados y se dio libertad para resolverlos.

La población escogida fueron los estudiantes de segundo ciclo de la Carrera Rediseñada: Pedagogía de Ciencias Experimentales que cursan la asignatura de Matemática Estructurada perteneciente al período marzo-julio 2018. El total de estudiantes que la cursan es de 75 registrados en lista, de los cuales se ha tomado la evaluación a 67 de ellos, por ser estudiantes regulares. De los 67 estudiantes se formaron un total de quince grupos de entre 4 y 5 integrantes. La tarea fue aplicada durante una clase de 60 minutos. Se les pidió que resolvieran los problemas, y explicasen con detalle el procedimiento empleado; se permitió utilizar un formulario con las fórmulas de la combinatoria.

## Análisis de los datos

A continuación, se muestra la frecuencia y porcentaje de soluciones correctas de cada una de las tareas, la configuración epistémica de la tarea y principales dificultades en la resolución.

**Tabla 2**

Frecuencias y porcentajes en cuanto a soluciones correctas e incorrectas.

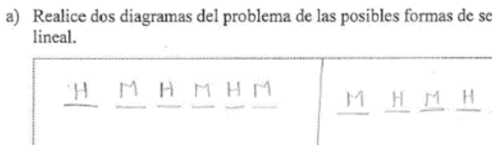
| Problema | Técnica de conteo | Correcta | Incorrecta |
|---|---|---|---|
| 1 | Permutación simple | 7 (46.7%) | 8 (53.3%) |
| 2 | Variación y permutación simple | 3 (20.0%) | 12 (80.0%) |
| 3 | Permutación con repetición | 6 (40.0%) | 9 (60.0%) |

Se observa que los estudiantes obtuvieron una mayor cantidad de aciertos en el problema 1; seguramente debido a que, por una parte, contaron con orientaciones metodológicas y, por otra, son un tipo de enunciados característicos de los problemas que se resuelven por permutación o bien por combinación. El problema 2, al ser necesario el uso conjunto de dos técnicas de conteo para ser resuelto, presentó más dificultad, probablemente debido a que los estudiantes no están familiarizados con ejercicios de este tipo. El problema 3, al necesitar el conocimiento de las nociones de orden y repetición, también les resultó difícil de resolver.

El análisis de la actividad matemática necesaria para resolver cada tarea se realizó mediante la técnica de análisis (Malaspina y Font, 2010) que describe las prácticas realizadas para la resolución del problema y las configuraciones cognitivas involucradas en ellas y permite compararlas con las prácticas y configuraciones epistémicas de referencia correspondientes.

La configuración epistémica de referencia del *Problema 1*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

| | |
|---|---|
| **Problema** | Problema 1: En una reunión de viejos amigos de la Universidad de Cuenca, se encuentran Viviana, Diego, Richard, Leonel, Ximena y Catalina. Se proponen ir al cine a disfrutar de una película. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en forma lineal si se desea que queden alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre)?<br>a) Realice dos diagramas del problema de las posibles formas de sentarse en forma lineal<br>b) ¿Qué principio se encuentra presente en este tipo de problema (multiplicativo, adición o ambos)?<br>El problema 1 es un ejemplo de los llamados problemas de colocación de permutación simple |
| **Conceptos/ Definiciones** | - Permutación simple<br>- Orden |
| **Proposiciones** | -Principio de multiplicación<br>-Principio de adición<br>-La fórmula que permite obtener el número de permutaciones simples:<br>$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ |
| **Procedimientos** | -Realizar diagramas<br>-Uso de la fórmula de permutación simple<br>-Suma de las permutaciones simples obtenidas cuando se sientan alternando primero con un hombre ($P_1$) y cuando se sientan alternando primero con una mujer ($P_2$). |

| | |
|---|---|
| **Representaciones** | <br>a) Realice dos diagramas del problema de las posibles formas de se lineal.<br><br>$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$<br><br>Suma de permutaciones: $P_1 + P_2$ |
| **Argumento** | - Hay solo dos posibles diagramas si queremos que se sienten alternados, uno empieza con un hombre y el otro con una mujer.<br>- Este problema tiene implícito el principio de adición.<br><br>Este problema corresponde al modelo combinatorio de colocación, debido a que son personas distinguibles en asientos distinguibles con un enunciado de permutación simple porque hay tantas sillas como personas. Dado que hay tres mujeres y tres hombres el resultado es $P_1 = 3! * 3! + P_2 = 3! * 3!$ , es decir 36 + 36 = 72 maneras diferentes de sentarse alternados (un hombre una mujer o una mujer un hombre). |

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que, todos los grupos, excepto uno, realizan los dos diagramas solicitados en el orden correcto. 7 de los 15 grupos, identifican el principio de adición. 12 de los 15 grupos reconocen el principio multiplicativo, 11 de los grupos reconocen que se trata de un problema de permutación simple y solo 8 grupos realizan el cálculo correcto de las permutaciones.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

"No sabíamos cómo hacer que se alternen hombre, mujer" (orden).

"Diferenciar el caso de combinatoria (permutación, variación o combinación)" (conceptualización).

"Identificar si solo se aplica el principio de producto o de sumatoria o ambos" (Principios de la combinatoria).

La configuración epistémica de referencia del *Problema 2*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

| | |
|---|---|
| **Problema** | Problema 2: Por el feriado de la Fundación de Cuenca, Ana con sus siete compañeros deciden viajar a la parte costera del Ecuador llevando para ello dos autos. Si deciden ir cuatro en cada auto, ¿de cuántas formas pueden viajar si solo tres de los compañeros tienen licencia de conducir?<br>El problema 2 es un ejemplo de los llamados problemas de Partición, de Variación y Permutación simples. |
| **Conceptos/ Definiciones** | -Variación simple<br>-Permutación simple<br>-Orden |
| **Proposiciones** | -Principio de multiplicación<br>-La fórmula que permite obtener el número de variaciones simples:<br>$P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$<br>-La fórmula que permite obtener el número de permutaciones simples:<br>$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$ |
| **Procedimientos** | - Descomposición en subproblemas: los conductores y los pasajeros<br>- Uso de la fórmula de variación simple<br>- Uso de la fórmula de permutación simple<br>- Aplicación del principio multiplicativo de la combinatoria. |

| | |
|---|---|
| **Representaciones** | - $P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$<br>- $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$<br>- $P_n^r \; * \; P_n^n$ |
| **Argumento** | - Al tener dos autos y tres conductores, se plantea una variación simple de los tres conductores, tomados de dos en dos (dos autos).<br>- Al ubicar dos conductores (uno en cada auto), me quedan seis pasajeros para ubicarlos en los autos, lo que me da una permutación simple de estos.<br>- Debido a que son sucesos simultáneos, se aplica el principio multiplicativo.<br>- Si bien, es un problema que se divide en partes, no se considera el orden en los que deben ubicarse, conductores y pasajeros, dentro del auto.<br>Este problema corresponde al modelo combinatorio de partición de elementos diferentes (los compañeros) en dos subconjuntos distinguibles (los autos):<br>$P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 6$<br>$P_6^6 = 6! = 720$<br>Principio multiplicativo: 720 * 6 = 4320 formas diferentes de viajar |

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que, 10 de los 15 grupos, identifican el contexto del problema, pero solo 7 de ellos descomponen en subproblemas. 14 de los grupos, no tiene problemas en enumerar los eventos, pero tan solo 5 grupos reconocen la técnica de variación simple y 6 la técnica de permutación simple. 12 de los 15 grupos identifica el principio de multiplicidad y solo tres grupos, realizan los cálculos de manera correcta.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

"Identificar el tipo de concepto matemático, porque puede confundirse con permutación o variación" (conceptualización)

"Analizar qué sucede con el conductor que queda fuera y ya no ocupa el cargo de chofer" (orden).

"Establecer los puestos de cada pasajero y cada conductor" (orden).

La configuración epistémica de referencia del *Problema 3*, elaborada por las autoras, es la siguiente:

| | |
|---|---|
| **Problema** | Problema 3: Un grupo de seis amigos, Lucía, Rodrigo, Nicolás, Humberto, Ximena y Miguel, tienen que realizar tres trabajos diferentes: Pedagogía, Mecánica y Estadística. Para realizarlo deciden dividirse en tres grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos?<br>El problema 3 es un ejemplo de los llamados problemas de Partición, de Permutación con repetición. |

| | |
|---|---|
| **Conceptos/ Definiciones** | - Permutación con repetición<br>- Orden<br>- Repetición |
| **Proposiciones** | - La fórmula que permite obtener el número de Permutación con repetición:<br><br>$P_R^n = \frac{n!}{R!R!R!}$ |
| **Procedimientos** | - Reconocer características de orden y repetición<br>- Uso de la fórmula de permutación con repetición |
| **Representaciones** | - $P_R^n = \frac{n!}{R!R!R!}$ |
| **Argumento** | - Para organizar tres grupos de dos compañeros cada uno, es necesario reconocer las características de orden y repetición de las asignaturas, es decir la distribución de las asignaturas entre los compañeros.<br>- Este problema corresponde al modelo combinatorio de partición, de permutación con repetición; es decir, de un conjunto de elementos diferentes (los amigos) en tres subconjuntos distintos (los trabajos a realizar):<br>$P_6^2 = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$ formas diferentes de dividirse para realizar el trabajo |

Evaluando los resultados obtenidos en la resolución de este problema, podemos concluir que solo 4 de los 15 grupos, identifican los elementos involucrados en el problema y solo 6 reconocen las características de los estudiantes y las asignaturas, además de realizar los cálculos de manera correcta.

Cuando se les preguntó cuál es la mayor dificultad que han tenido en la resolución de este problema, algunos estudiantes manifestaron lo siguiente (se destacan las respuestas más interesantes):

"Identificar qué técnica de conteo utilizar, ya que nos confundíamos con las condiciones del problema que nos dieron" (conceptualización).

"Comprender el ejercicio, porque el uso de datos y el trabajo fue compleja" (conceptualización).

## Conclusiones

En esta investigación, presentamos el diseño de algunas tareas que nos permiten evaluar y caracterizar la actividad matemática realizada por estudiantes de los primeros cursos universitarios al resolver problemas de combinatoria y también cómo analizan ellos mismos sus dificultades para conseguir resolver los problemas.

La información obtenida nos permite también evaluar la comprensión que tienen los participantes sobre la combinatoria y su competencia para analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas de combinatoria. Con relación a la comprensión, podemos concluir que es limitada ya que no pueden resolver una muestra representativa de problemas. Con relación al análisis de la actividad matemática, sus comentarios sobre las dificultades que tuvieron muestran unos análisis poco detallados.

**Referencias bibliográficas:**

Batanero, C., Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa,* 8 (1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31 (57), 90-113.

Parra & Paucar, 2018. Elaboración de un manual que contenga estrategias didácticas para mejorar el aprendizaje de combinatoria en la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, con la utilización de material didáctico. Universidad de Cuenca. Cuenca.

Pino-Fan, L., Font, V., & Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapur: PME.

Rubio, N. (2012). “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos”. (Doctoral dissertation). Recuperado de http://www.tdx.cat/handle/10803/294031

Stahnke, R; Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers’ perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics.*

# ¿Cómo construir el concepto de fracción a partir de sus significados?

**Olimpia Castro Mora**
Sociedad Peruana de Educación de Matemática (SOPEMAT)

## Resumen

En nuestro país, se trabaja el concepto de fracción desde el Ciclo IV de la Educación Básica Regular y se espera que, al culminar primaria, los estudiantes lo comprendan y lo apliquen satisfactoriamente. Evidencias recogidas en evaluaciones censales muestran que los estudiantes, incluso de secundaria, presentan dificultades en el aprendizaje de estos conceptos y en la resolución de problemas.

Por ello, nuestro objetivo es explicar , a partir de la evidencia encontrada en las evaluaciones censales, en qué radica el error del estudiante al enfrentar tareas que involucran la noción de fracciones, lo que mostrará las dificultades de los estudiantes en la comprensión y la aplicación de los diferentes significados de la fracción al abordar distintas tareas.

En este taller teórico-práctico los participantes analizarán tareas de la evaluación censal u otras actividades para que reconozcan cada uno de estos significados de la fracción en situaciones problemáticas y la pertinencia de sus representaciones.

De esta manera, los participantes lograrán afianzar sus conocimientos disciplinar y didáctico relacionados con el concepto de fracción, que les ayudará para proponer actividades que les permita organizar las nociones y las relaciones de los temas matemáticos a enseñar con respecto a las fracciones y tener mayores recursos para atender a las dificultades que se vienen presentando su aprendizaje.

**Palabras clave:** Fracción, concepto, representación, estrategia.

## Introducción

Se cuenta con diversas investigaciones que sirven de sustento científico para abordar el concepto de fracción según sus significados en diversas situaciones, tanto en el aprendizaje de los estudiantes durante la escolaridad como de los docentes en el proceso de enseñanza o de futuros docentes en su período de formación, así como también la manera en cómo se aborda este concepto en algunos materiales de trabajo. Estas investigaciones ponen de manifiesto cómo el trabajar solo algunos significados de la fracción obstaculiza la construcción de nociones adecuadas de fracción y no favorece para alcanzar su comprensión.

Entre las investigaciones encontradas se tiene a Silva (2005) con su tesis investigando saberes de profesores de enseñanza fundamental con enfoque en números fraccionarios donde señala que los docentes solo conocen algunos significados de la fracción y este suele ser el concepto de fracción como parte-todo. Esto hace que, por lo general, sea este significado el único que se imparte en las clases, lo que genera limitaciones en la comprensión del concepto y hasta la ruptura en la relación entre fracción y sus usos, tal como la aparición del número mixto al medir o usar la fracción como razón al comparar dos cantidades. Señala la autora, que puede ser esta la causa por la que los docentes recurran al uso de técnicas rígidas, centradas en procedimientos mecánicos poco comprendidos para lograr responder a ciertos tipos de problemas que no abordan todos los significados de las fracciones. Asimismo, Castro (2017) manifiesta que algunos docentes en formación inicial solo pueden leer y escribir numéricamente fracciones propias o impropias sin contexto alguno y muestran dificultad al representarlo gráficamente ya que todo lo asocian a solo un significado de fracción, que es el de fracción como parte-todo, que en algunos casos no se ajusta a la situación. De allí que estas investigaciones sugieren organizar los conceptos de fracción desde sus diversos significados para alcanzar mayor comprensión, lo cual permitiría consolidar el concepto de fracción, resolver con ello diversas situaciones problemáticas y sentar las bases para la construcción del campo de los números racionales.

Este taller busca afianzar en los docentes los conocimientos disciplinar y didáctico relacionados con el concepto de fracciones, y su estrecha relación con las representaciones. Sánchez (2001), nos dice que la comprensión de una idea matemática, implica, la habilidad de manejar sus diferentes representaciones y realizar conversiones entre estas, y Ma (2010) destaca la importancia del momento en que se presenta un concepto por primera vez para asegurar su comprensión. Por otro lado, D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli. (2010) señalan que una de las causas más frecuentes de los errores de los estudiantes es la dificultad en el manejo de las diferentes formas de representación de un concepto. Al respecto, Rico (1995) señala que el error no solo manifiesta el desconocimiento de algo sino también pone en evidencia un conocimiento inadecuado sobre un contenido matemático que tiene uno o varios estudiantes. Por ello, en este taller se buscará explicar la naturaleza del error del estudiante en los aspectos de fracciones a partir de la evidencia encontrada en las evaluaciones censales, lo que mostrará las dificultades de los estudiantes en la comprensión y la aplicación de los diferentes significados de la fracción, cuáles son estas dificultades, cómo se expresan y cómo se podrían abordar.

Por ello que, se abordarán los diferentes significados de la fracción: como parte-todo (discreto o continuo), como cociente (o reparto), como razón, como operador y como medida. Se explicará cada significado a partir de situaciones que le den sentido tanto en contexto discreto como continuo, así también, usando diversas representaciones. Entre ellos se tiene:

a) **Significado de la fracción como parte-todo**: Se presenta cuando un todo (denominado también "unidad") es dividido en partes equivalentes, para luego establecer una relación entre las partes seleccionadas y el número total de partes que conforman el todo.

b) **Significado de la fracción como cociente**: Se presenta en situaciones de reparto, cuando un todo o "unidad" se distribuye de manera equitativa entre un número de personas o de partes.

c) **Significado de la fracción como razón**: Surge en situaciones de comparación entre dos cantidades de la misma o de diferente magnitud.

d) **Significado de la fracción como operador**: La fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones operativas de división y de multiplicación, de modo que la transforma en una nueva cantidad.

e) **Significado de la fracción como medida**: Surge al comparar dos magnitudes, de las cuales una de ellas es el referente para medir y la otra magnitud es la que se quiere medir.

Con las actividades del taller, se buscará que los participantes reconozcan cada uno de estos significados de la fracción en situaciones problemáticas concretas, cómo se representan y cómo se relacionan. Llinares y Sánchez (1997) resaltan que para llegar a la comprensión del concepto de fracción se debe pasar por todas sus interpretaciones y, además, las establecidas desde el lenguaje cotidiano. Es importante establecer una gradualidad en el desarrollo de estos conceptos, a lo largo de la escolaridad y, por ello, se trabajará con situaciones problemáticas de los diferentes grados en que se consolidan dichos conceptos, desde 4.° grado de primaria hasta 2.° grado de secundaria.

Finalmente, dentro del taller se promoverá en los participantes la creación de situaciones problemáticas propias, las cuales podrán aplicar a los estudiantes en el aula para el desarrollo de la competencia matemática en fracciones.

## Materiales y métodos

El taller será activo-participativo, es decir, a la luz de una base conceptual, que será presentada y ejemplificada, los participantes analizarán y contrastarán diversas situaciones problemáticas con los distintos significados de la fracción para reconocer sus características y particularidades.

Además, será de alcance descriptivo donde se analizarán evidencias encontradas en las evaluaciones censales, relacionadas con las respuestas de los estudiantes a estímulos con fracciones. Se describirán de las respuestas las caracterizaciones de sus representaciones y se sistematizarán las dificultades de los estudiantes y, a partir de ellas, se buscarán estrategias para potenciar las habilidades cognitivas de los estudiantes. Así, por ejemplo:

Los docentes analizan, en grupos, tareas que le permitan identificar el contenido abordado, la capacidad que está involucrada y el contexto de la tarea. Veamos el siguiente ejemplo:

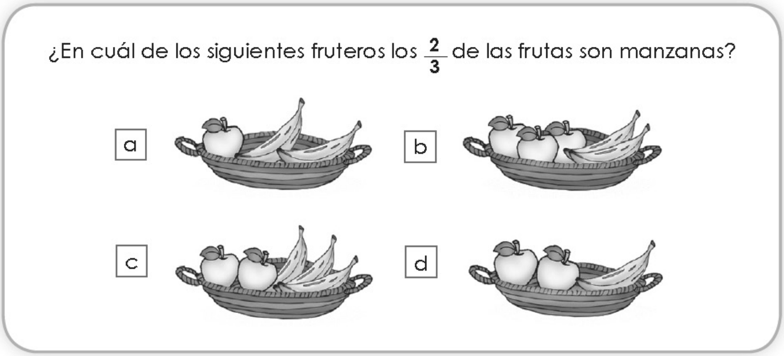



*Figura 1. Pregunta de fracciones de la ECE 2015-Minedu (2016).*

En este caso, primero se hace el análisis didáctico de la tarea identificando el conocimiento involucrado como análisis de contenido, y el análisis cognitivo identificando los procesos cognitivos que intervienen a través de las capacidades y el contexto en el que se presenta. En este ejemplo, los participantes identificarán que es una tarea de fracción en su significado parte todo discreto,  centrado en la capacidad de comunicar ideas matemáticas y donde la respuesta correcta implica haber identificado el todo como frutas y las partes que son manzanas y plátanos, categorías inclusivas. Junto con señalar la respuesta correcta, los participantes comienzan a analizar los posibles errores que llevan a los estudiantes a marcar otras alternativas. En este caso, se evidencia que los estudiantes que marcan alternativa b) y c) son aquellos que conciben la fracción como un arreglo de dos números y que buscan que haya 2 frutas de un tipo y 3 de otro. La evidencia de la Evaluación Censal de 2.° de secundaria 2015 indica que el 54,8% de los estudiantes presentan esta dificultad.

A partir de ello, se generan acciones que llevan a dar propuestas de cómo desarrollar el concepto de fracción en las actividades de clase para evitar estos errores. Asimismo, permite identificar claramente la dificultad generada en el estudiante para acompañarlo de mejor manera en el proceso de retroalimentación. Luego, los participantes dan propuestas de tareas que enfaticen la comprensión del concepto de fracción atendiendo a las distintas capacidades matemáticas y que respondan a diversas demandas cognitivas.

El trabajo se hará en forma individual, luego en parejas y, finalmente, se hará una puesta en común.

## Resultados y discusiones

Concluido el taller, los participantes serán capaces de:

- Diferenciar los distintos significados de la fracción y reconocer cada uno de ellos en un grupo de situaciones problemáticas dado.
- Crear situaciones problemáticas propias, con los diferentes significados de la fracción, para aplicar a los estudiantes en el aula con una intensión pedagógica definida.

- Proponer tareas de fracciones que involucren las distintas capacidades, desde la representación, el modelar y el razonar y argumentar que impliquen variada demanda cognitiva.

**Conclusiones**

Este taller puede dar un valioso aporte a los docentes en formación como en servicio para poder comprender a cabalidad los conceptos de fracción y su forma de trabajarlo en aula según lo propuesto en el Diseño Curricular correspondiente a la noción de fracción. Los aportes y las evidencias encontradas nos confirman que:

Se debe trabajar desde los primeros grados de la escolaridad los distintos significados de las fracciones para poder consolidar la comprensión del concepto y poder aplicarlo en diferentes situaciones que se le presenten.

El aprendizaje de las fracciones a partir de sus significados permite dar una mirada funcional, es decir, le da sentido y utilidad a los conceptos aprendidos.

Los docentes debemos propiciar en las actividades de clase el uso de diferentes representaciones de una fracción tanto de la situación a la representación y viceversa como también poder graduar la complejidad de las tareas.

Realizar estudios que permitan investigar el nivel de comprensión de conceptos con respecto a la fracción que tienen los docentes en servicio como también los docentes en formación para, a partir de ello, dar propuestas que contribuyan en la formación inicial y continua de estos. Dichas propuestas deben considerar el concepto de fracción tanto desde un conocimiento pedagógico como disciplinar.

**Referencias bibliográficas:**

Castro, O. (2017). *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de educación primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales.* (Tesis de Licenciatura). Universidad Antonio Ruiz de Montoya. Lima, Perú. Recuperado de http://repositorio.uarm.edu.pe/bitstream/UNIARM/44/1/Castro%20Mora%2C%20Olimpia%20Rosa_Tesis_Licenciatura_2017.pdf

D' Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I. y Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática.* Bogotá: Magisterio.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales.* (1.ª ed.). Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.° grado de secundaria*. Lima: Autor. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.) Educación Matemática. *Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108).* Bogotá: Una empresa docente.

Sánchez, M. (2001). Dificultades específicas en el aprendizaje de las fracciones. Estudio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. En M. Chamorro (Ed.) *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas.* (pp. 11-24). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil. Recuperado de: http://www.ime.usp.br/~iole/significados%20da%20fra%E7%E3o.pdf

# El conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, como problema de investigación

**María Angelita Aredo Alvarado**
Universidad Nacional de Piura

**Francisco Javier Ugarte Guerra**
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP)

## Resumen

El presente trabajo de investigación tiene como objetivos mostrar las dificultades y errores presentes en los estudiantes al determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para ello, se realiza el análisis de una situación didáctica, diseñada en el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), implementada con estudiantes de primer ciclo de la especialidad de Estadística, semestre académico 2018 - I de la Universidad Nacional de Piura. La actividad permitió desarrollar y observar los comportamientos matemáticos de los estudiantes y realizar un análisis desde la TSD. La metodología utilizada en esta investigación es la Ingeniería Didáctica, que se caracteriza por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, en el proceso experimental se puede distinguir las fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación, análisis posteriori y validación. De los resultados obtenidos podemos destacar que al resolver y determinar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales los estudiantes muestran dificultades en los procedimientos, cálculos aritméticos así como también en la representación gráfica de sistema de dos y tres ecuaciones lineales con dos variables.

**Palabras clave:** Conjunto solución, sistemas de ecuaciones lineales, situación didáctica, ingeniería didáctica.

## Introducción

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones se extiende a varios temas de importancia en Álgebra Lineal como es rango, independencia y dependencia lineal de vectores, transformaciones lineales, valores y vectores propios, etc. De allí la motivación de este trabajo por identificar errores que cometen los estudiantes al determinar la solución de sistema de ecuaciones lineales en el caso de dos y tres variables así como el análisis de su interpretación geométrica.

El concepto y solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos o tres variables ha sido tema estudiado por otros investigadores; a continuación hacemos una breve revisión de los más resaltantes para nuestro trabajo:

Ramírez, Oktaç y García (2002) se enfocaron en los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables, además se basaron en las concepciones de los modos de pensamiento geométrico y analítico en álgebra lineal (Sierpinska, 2000). En su investigación observan que la mayoría de los estudiantes presentan dificultad en el modo de pensamiento sintético-geométrico y además no muestran un vínculo adecuado entre los modos sintético y analítico. Asimismo, consideran que se debería discutir con los estudiantes el caso de los sistemas de ecuaciones lineales que representan infinitas soluciones poniendo énfasis en ambos modos de pensamiento.

Ochoviet (2009) analiza la forma de construir el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos variables y se plantea dos objetivos. El primero fue “estudiar cuál es el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales que construyen los estudiantes uruguayos (de 14-15 años y 17-18 años) cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2x2”. Como segundo objetivo se propuso “diseñar una secuencia de enseñanza, para estudiantes de 14-15 años, del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas". Una de sus recomendaciones es que los sistemas de ecuaciones deberían ser presentados en diferentes modos de pensamiento: el sintético –geométrico–, el analítico –aritmético– y el analítico –estructural–.

De manera más general, Oktaç (2018), presenta los resultados de investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes, en diferentes niveles escolares y universitarios, estableciendo relaciones con la forma en que se aborda los sistemas de ecuaciones lineales. Además de analizar la concepción de "solución" considera la de un sistema ampliado en un contexto de estudio de México y Uruguay lo que la lleva a reconocer una experiencia más general relacionado con las concepciones que los estudiantes desarrollan en relación con los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.  Borjón, Torres y Sosa (2015) estudian, analizan la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 considerando la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, pretendiendo que los estudiantes transiten entre diferentes representaciones de la solución de ecuaciones lineales (de la verbal a la analítica, de la analítica a la geométrica y de la geométrica a la aritmética), para posteriormente regresar a la solución del problema en su contexto. Esto se posibilita por el uso de la tecnología, diseñando un instrumento a través de una hoja de cálculo interactiva en Excel. Concluyen que la mayoría de los alumnos fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la analítica. Por otra, el uso de la tecnología, permitió que los alumnos lograran transitar entre diferentes representaciones del concepto de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2.

Del mismo modo Segura (2004), detalla la construcción y aplicación de una secuencia didáctica que facilita el aprendizaje y solución de sistemas de ecuaciones lineales. Elaboró dicha secuencia a base de investigaciones que están hechas tanto sobre fenómenos relativos al uso de representaciones semióticas en el aprendizaje, la necesidad de plantear al alumno actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación, así como sobre la explicación de problemas que conciernen a la aprehensión de objetos matemáticos. El objetivo de su trabajo consistió en diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza para el aprendizaje y solución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Manzanero (2007) pretende identificar las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar el concepto de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales, así como las construcciones mentales que puedan presentar, mediante una descomposición genética, sustentada por la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) (Asiala et al., 1996). Para observar dichas construcciones mentales realiza una entrevista a 6 estudiantes de nivel superior, en sus resultados puede observar ciertas dificultades para el concepto de conjunto solución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo observa que ningún estudiante mostró tener una concepción objeto para el concepto de conjunto solución y que pocos de ellos mostraron haber construido un proceso de solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables. De acuerdo con sus resultados sugiere hacer una modificación en la descomposición genética para mejorar la construcción del concepto.

Betancourt (2009), en su trabajo diseña y desarrolla un software educativo que apoye a la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss (o eliminación gaussiana), además centrado en la enseñanza conceptual de los sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior, para que, de esa manera, se promueva una mejor comprensión y entendimiento de los conceptos matemáticos implícitos al resolver un Sistema de Ecuaciones Lineales en alumnos de nivel superior.

Asimismo, González y Roa (2015) tratan del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de los modos de pensamiento sintético – geométrico, analítico – aritmético y analítico – estructural. Analizan el trabajo de un grupo de estudiantes universitarios, los problemas propuestos se centraron en sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se centran en los métodos de solución de un sistema: reducción, eliminación y sustitución. Su objetivo fue identificar los modos de pensamiento, formas de pensar, con que los estudiantes de ingeniería abordan situaciones relacionadas con sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas (2x2 y 3x2); así como la manera en que pueden transitar de un modo de pensar a otro.

La metodología utilizada en esta investigación es la Ingeniería Didáctica de Artigue (2015), que se caracteriza por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir utiliza la validación interna que se apoya en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de la secuencia. En el proceso experimental se puede distinguir las fases: análisis preliminar, concepción y análisis a priori, experimentación, análisis posteriori y validación.

El análisis preliminar constituye la base de esta metodología de investigación, en ella tiene lugar la revisión bibliográfica, los análisis de resultados anteriores referidos al objeto de estudio, también se presenta a su desarrollo histórico, epistemológico y didáctico. Asimismo realizamos un análisis de los libros de texto de nivel de Educación Secundaria y de Álgebra Lineal de nivel superior.

A fin de desarrollar y observar los comportamientos matemáticos en los alumnos utilizamos herramientas de la Teoría de Situaciones Didácticas, observando la actividad matemática desarrollada por los estudiantes a través de las de las fases de acción, formulación y validación. Para ello elaboramos un cuestionario sobre sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables y de tres ecuaciones con dos variables, haciéndoles preguntas acerca del número de soluciones del sistema dado en distintas representaciones.

Los objetivos de la investigación son: mostrar las dificultades y errores que presentan los estudiantes al resolver un sistema de ecuaciones lineales y determinar el conjunto solución y la correcta interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales.

## Materiales y métodos

Se trabajó con una población de 26 estudiantes de nivel superior con edades entre 17 y 18 años que cursaban el primer ciclo de estudios en el semestre académico 2018- I en la Universidad Nacional de Piura. Los antecedentes académicos de los estudiantes era haber estudiado sistemas de ecuaciones lineales en la educación secundaria.

Metodológicamente, este estudio fue de naturaleza cualitativa y su diseño fue experimental, porque se desarrolló con un grupo estudiantil ya constituido en una sola sección. Para la recopilación y el análisis de los datos se diseñó y elaboró una actividad que consistía en una prueba diagnóstica de seis preguntas relacionadas a Sistema de Ecuaciones Lineales.

La experimentación tuvo una duración de dos horas; el material se entregó a cada uno al inicio de la sesión. Se trató de que el estudiante desarrolle individualmente la prueba sin darle ningún alcance con respecto a la solución.

## Resultados y discusión

Para ilustrar las dificultades relativos a los sistemas de ecuaciones lineales, se presentan las pregunta 1 y 2 de la actividad que se aplicó a los estudiantes.

1. Determinar el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales e interpretarlo geométricamente cada uno de los sistemas.

$$a)\begin{cases} 2x-2y=15 \\ x-y=9 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2x-2y=8 \\ x-y=4 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

Con este tipo de pregunta se pretende descubrir si el estudiante conoce algún método de resolución de sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos variables, además que conocimiento adquirió durante sus estudios de educación secundaria, a la vez ver qué estrategias utiliza y cómo lo hace para determinar el conjunto solución.

En base a la información recogida, se describe los comportamientos observados en el desarrollo de la actividad. En este apartado presentamos algunos resultados dados por los estudiantes para ilustrar las dificultades que se presentaron, mayormente hay más de dos tipos de respuestas. En el ítem 1a, 02 estudiantes resuelven correctamente el sistema mediante el método eliminación; 02 estudiantes grafican las ecuaciones del sistema; 05 no responden nada y los demás estudiantes cometen errores en el cálculo ya sea cuando despeja una variable de una ecuación y reemplaza en la otra o cuando simplifica coeficientes. En el ítem 1b solo 01 estudiante resuelve correctamente el sistema pero no dice cuál es el conjunto solución, 06 estudiantes no responden; los demás tienen diversos errores. En los ítems 1a y 1b la mayoría de los estudiantes no respondieron correctamente como se muestra en las figuras siguientes.

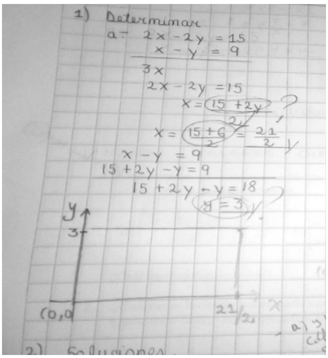



*Figura 1. Respuesta incorrecta del ítem 1a*

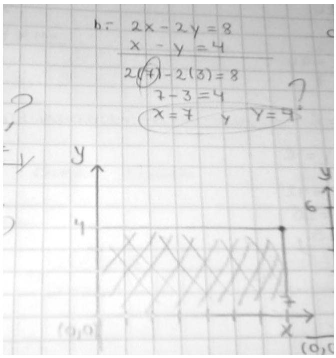



*Figura 2. Respuesta incorrecta del ítem 1b*

Lo que se esperaba que los estudiantes respondan en el ítem 1a: el sistema no tiene solución;  y en el ítem 1b: el sistema tiene infinitas soluciones. Aquí en estas respuestas vemos en primer lugar que los estudiantes cometen errores de cálculos sin mayor sentido lógico, no se aprecia el método de resolución. En segundo lugar vemos que la interpretación geométrica no es la adecuada a la pregunta, pues no están interpretando geométricamente el sistema de ecuaciones, sino más bien la solución supuesta que encuentran del sistema de ecuaciones.

Otras respuestas de los estudiantes que dieron al ítem 1a, donde se observa en la figura 3 que el estudiante grafica bien el sistema de ecuaciones pero no determina correctamente el conjunto solución del sistema geométricamente, y en la figura 4  no se aprecia el método de resolución del sistema  del  ítem 1a  además el conjunto solución del sistema es incorrecto. Como se muestran en las figuras siguientes.

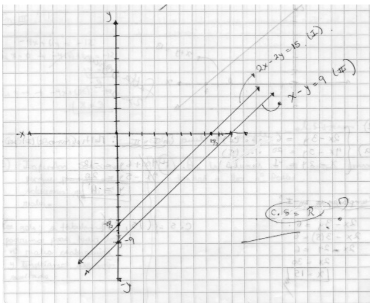



*Figura 3. Gráfica del sistema del ítem 1a*

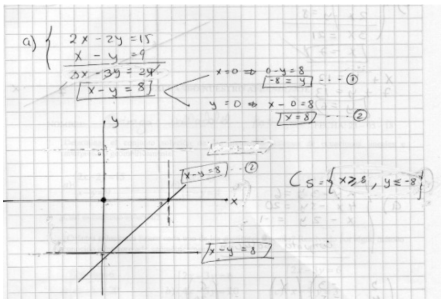



*Figura 4. Respuesta incorrecta del ítem 1a*

Respuesta incorrecta del conjunto solución del Sistema ecuaciones lineales.

En el ítem 1c, la mayoría de los estudiantes respondieron correctamente a la pregunta cómo se muestran en las figuras 5 y 6. Trataron de resolver el sistema, pero nuevamente vemos que se comete errores en la interpretación geométrica.

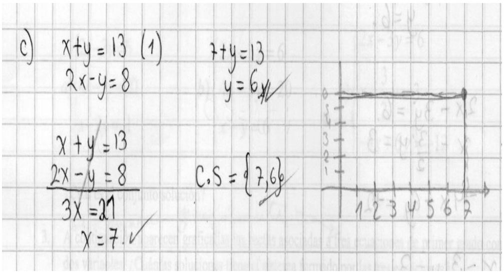



*Figura 5. Respuesta correcta. Interpretación incorrecta*

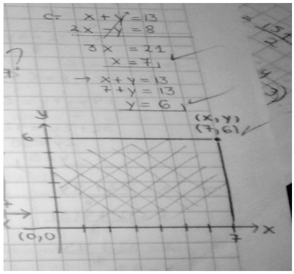



*Figura 6. Respuesta correcta. Interpretación geométrica incorrecta.*

Podemos decir que las dificultades de la mayoría de los estudiantes se deben a que no verifican los valores hallados en las ecuaciones para ver si satisfacen o no. La dificultad que tienen es la compresión a la pregunta que se les hace, en este caso a la interpretación geométrica del sistema y no la solución del mismo.

Ahora consideramos un sistema de tres ecuaciones con dos variables

2. ¿Cuántas soluciones tienen cada uno de los siguientes sistemas? Resolverlo por algún método conocido o interpretarlo geométricamente.

$$a)\begin{cases}2x-3y=6\\4x-5y=20\\x-2y=-1\end{cases}\quad b)\begin{cases}2x-3y=6\\4x-5y=20\\x-y=6\end{cases}\quad c)\begin{cases}2x-3y=6\\x-\dfrac{3}{2}y=3\\-4x+6y=-12\end{cases}$$

Con este tipo de pregunta se pretende conocer si el estudiante aplica algún método de resolución de sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con dos variables, además cómo interpreta el conjunto solución del sistema.

En base a la información recogida, se describe los comportamientos observados en el desarrollo de la actividad. Presentamos algunos resultados dados por los estudiantes. En el ítem 2a, 03 estudiantes resuelven correctamente el sistema mediante el método sustitución, 06 no responden nada y los demás estudiantes cometen errores en el cálculo ya sea cuando despeja una variable de una ecuación y reemplaza en la otra ecuación, algunos de ellos solo toman dos ecuaciones lo resuelven pero no verifican si estos valores satisfacen a las tres ecuaciones. En el ítem 2b ningún estudiante acierta con la respuesta que el sistema no tiene solución, 08 estudiantes no responden nada; los demás hacen intentos en la solución del sistema mediante los métodos de eliminación y sustitución pero no concluyen nada. En el ítem 2c, 01 estudiante resuelve el sistema correctamente concluyendo que tiene infinitas soluciones, 15 estudiantes no resuelven nada, los demás cometen errores en los cálculos, solo toman dos ecuaciones, errores de signos en los cálculos. Las gráficas de las ecuaciones no son las adecuadas como se muestra en la figura 7 la gráfica del ítem 2a.

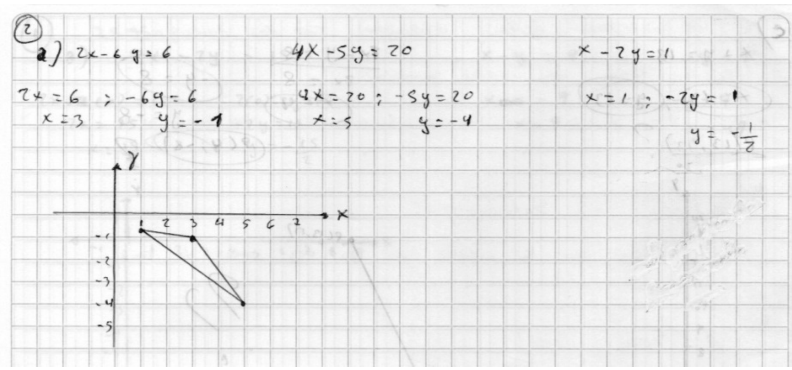



*Figura 7. No determina solución del sistema, interpretación geométrica incorrecta.*

En esta pregunta las dificultades que tienen la mayoría de los estudiantes, vuelve a ser que no verifican si la solución que encuentran satisface las tres ecuaciones, en segundo lugar cometen errores en graficar las ecuaciones, en algunos casos grafican segmentos, líneas horizontales y triángulos.

Con respecto a otras investigaciones realizadas, también se obtienen resultados similares. Segura (2004) menciona los errores comunes que presentan los alumnos al resolver sistemas de ecuaciones de 2x2 son: el manejo de las operaciones aritméticas elementales, resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución. "Hay una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución" (Panizza et al. 1995, citado por Segura 2004).

## Conclusiones

— Los resultados que se obtienen poco satisfactorios que muestran los estudiantes al accionar en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

— La mayoría de los estudiantes salen del contexto que es el sistema de ecuaciones lineales, se muestran incapaces de manejar los conocimientos adquiridos en la educación secundaria.

— La mayoría de los estudiantes le falta conocimientos de grafica de ecuaciones, pues esta dificultad no le permite hacer una correcta interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales.

— Los estudiantes no utilizan la verificación de su solución como un medio de control de sus respuestas.

**Referencias bibliográficas:**

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gomez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. Bogotá. Colombia. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Betancourt, Y. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Borjón, E., Torres, M., & Sosa, L. (2015). *Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2x2 con Excel*. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. XIV CIAEM – IACME, Chiapas, México D. F., 2015.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al Estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

González, D.; Roa, S. (2015*). Los sistemas de ecuaciones lineales: Evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios*. Universidad Industrial de Santander. Colombia. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10713/1/Gonzalez2015Los.pdf

Manzanero, L (2007). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, Distrito Federal.

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el Concepto de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con dos Incógnitas*. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria. Montivideo-Uruguay.

Oktac, A. (2018). *Conceptions About System of Linear Equations and Solution*. Springer International Publishing AG 2018. Cinvestav-IPN, México City, México.

Ramírez, C.; Oktaç, A. & García, C. (2002). *Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales.* Cinvestav-IPN, México, Universidad Autónoma de Guerrero, México. (págs. 413. 418) CONACYT 2002-C01-41726. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5539/1/GarciaDificultadesAlme2006.pdf

Segura, S. (2004). *Sistema de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Relime Vol. 7, Núm. 1, marzo 2004, pp. 49-78.

# Fundamentos didáticos de la resolución de problemas matemáticos: experiencia con docentes en formación

**Yenis Cuétara Hernández**
**José Enrique Martínez Serra**
Universidad Nacional de Educación

**Resumen**

La resolución de problemas constituye una de las actividades más inteligentes del ser humano, por propiciar el desarrollo del pensamiento y del conocimiento, lo cual favorece la formación integral del estudiante. De ahí su relación con la Didáctica y su objeto de estudio: el proceso de enseñanza-aprendizaje escolarizado. En este trabajo se establece una correspondencia entre los distintos componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje con la resolución de problemas matemáticos, haciendo énfasis en la utilización del Programa Heurístico General como recurso eficaz para el desarrollo de habilidades y capacidades en los docentes en formación para la resolución de problemas.

**Palabras clave:** Resolución de problemas, componentes didácticos, docentes en formación.

## Introducción

La Enseñanza de la Matemática posee una larga historia. Desde tiempos remotos se ha considerado como una asignatura necesaria para la preparación de las nuevas generaciones, básicamente para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico como objetivo central, desde el cual se entiende el papel esencial que han desempeñado los problemas en las clases de matemática, ya que se comprende a la resolución de problemas como una de las actividades básicas del pensamiento. Este peso de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática se aprecia desde tiempos remotos, ya que algunos autores consideran como problemas escolares hasta aquellos encontrados en las tablillas mesopotámicas y los papiros egipcios. En consecuencia, algunas de las razones que permiten considerar a la resolución de problemas dentro de la enseñanza han sido:

— Sus potencialidades para el desarrollar el pensamiento, en particular la capacidad del hombre para resolver problemas, lo cual justifica la importancia de la matemática y su aplicación a diferentes situaciones de la vida y la ciencia.

— Motiva el estudio de un tema sobre la base de presentar problemas que sean capaces de atraer la atención de los alumnos y que permiten la introducción de nuevos contenidos, en particular aquellos que puedan ilustrarse con ciertos “problemas tipos”.

— Fija procedimientos matemáticos que han sido estudiados en clases.

— “Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto, pero, sí pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo. Experiencias de este tipo, a una edad conveniente, pueden determinar una afición para el trabajo intelectual e imprimirle una huella imperecedera en la mente y en el carácter” (Polya, 1965).

Sin embargo, el aprender a resolver problemas no ha figurado como una de las esencias de la enseñanza de la matemática, ya que por mucho tiempo se consideró que a resolver problemas se aprende por imitación, es decir, viendo e imitando las actividades y el proceder del que resuelve. Aunque es innegable que esta vía puede servir a algunas personas para aprender a resolver problemas, hay que decir que la escuela no está hecha para que algunos aprendan sino para que todos aprendan y con este procedimiento no puede lograrse que todos aprendan. De ahí que la Didáctica de la Matemática como psicología del aprendizaje de dicha ciencia por los alumnos tenga la responsabilidad de encontrar las bases y fundamentos pedagógicos y didácticos sobre las cuales se fundamenta la enseñanza de la resolución de problemas para todos los alumnos y la integración de estos con los componentes del proceso.

Por ello el concepto problema es comprendido en la Didáctica, como una situación inherente a un objeto, que induce una necesidad en un sujeto que se relaciona con dicho objeto y que sirve como punto de partida, tanto para el diseño, como para el desarrollo del proceso docente-educativo, lo que significa que en su desarrollo el problema es el punto de partida para que en su solución el alumno aprenda a dominar la habilidad y se apropie del conocimiento.

El proceso de enseñanza-aprendizaje está sustentado didácticamente por un grupo de componentes que reflejan su propia naturaleza: estudiante, profesor, grupo, objetivo, contenido, método, medios, forma de organización y evaluación hacen de este un complejo y dinámico proceso que requiere de un constante estudio y de profundas investigaciones. Se reconocen a dos de estos componentes como protagonistas del proceso: el estudiante y el profesor, centrándose la atención en el sujeto que aprende, como ente activo del proceso de aprendizaje y se resalta el papel del profesor para potenciar el aprendizaje del alumno.

El profesor es el responsable de guiar el desarrollo de los objetivos y contenidos, impone su toque personal, el arte para implementar los métodos y formas de docencia en el aula, es quien tiene el compromiso de promover el desarrollo de la personalidad integral del estudiante, ilustrando sus exposiciones mediante ejemplos tomados del medio para permitirle al alumno encontrarle sentido a lo visto, ya que “los conocimientos que más se graban en la mente son los adquiridos por los alumnos mediante observaciones personales bajo la dirección del maestro…” (Stresikosin, 1976).

El objetivo, es la categoría rectora porque es capaz de orientar hacia el futuro el proceso de enseñanza-aprendizaje. Expresa el para qué se enseña y educa al alumno, es la meta, la aspiración y el propósito ya que satisface las necesidades cognitivas del estudiante, al igual que orienta la formación de sus valores y responde a las necesidades que plantee la sociedad. De ahí que el objetivo general que persigue la enseñanza de la resolución de problemas en el transcurso de la vida escolar es dotar al estudiante de capacidades y habilidades que le permitan resolver problemas tanto en el campo de las ciencias como en su entorno social y la adecuada formación de su personalidad. El contenido responde a lo que se enseña y aprende. Lo que se enseña es aquella parte de la cultura que se selecciona para que el estudiante se apropie de ella, lo que se aprende es aquella cultura traducida en los diferentes tipos de contenidos como son los sistemas de conocimientos, los sistemas de habilidades y hábitos, los sistemas de relaciones con el mundo y los sistemas de experiencias de la actividad creadora.

En la resolución de problemas el contenido de estos determina el cumplimiento de sus funciones: instructiva, educativa y desarrolladora, pues en dependencia de su información y exigencias este puede estar relacionado tanto con el propósito del desarrollo de habilidades y capacidades en un contenido determinado como con la adquisición del nuevo conocimiento, los cuales pueden estar relacionados con cualquiera de las ramas de la matemática, situaciones de la vida cotidiana o las ciencias. Los contenidos se concretan y se aprenden a través de las vías y caminos de cómo enseñar y cómo aprender, es decir por medio de los métodos, entendido como: “la secuencia de actividades del profesor y de los alumnos dirigida a lograr los objetivos de la enseñanza” (Castellanos, 2001).

El método es el elemento director del proceso, responde a ¿Cómo desarrollar el proceso? ¿Cómo enseñar? ¿Cómo aprender? Representa el sistema de acciones de profesores y estudiantes, como vías y modos de organizar la actividad cognoscitiva de los estudiantes y como reguladores de la actividad de profesores y estudiantes, dirigidas al logro de los objetivos. El método contribuye al logro de una enseñanza desarrolladora cuando es productivo, heurístico, problémico, porque ayuda a desarrollar en el estudiante su creatividad e inteligencia. Además, propicia el trabajo grupal, en armonía con el individual, de ahí que sean estos los sugeridos para el tratamiento de la resolución de problemas matemáticos ya que propician la motivación del estudiante, favorecen su iniciativa, independencia, el deseo de saber, conocer e investigar y el desarrollo de capacidades que le faciliten la formación del razonamiento matemático y científico. Métodos que permitan formar profesionales capaces de aplicar los conocimientos esenciales básicos en la solución de situaciones nuevas.

Para el logro de estas exigencias es válido preocuparse por aquello que constituye un soporte del método, o sea, aquello que permite su implementación, el con qué llevo adelante la acción de enseñar y con qué se aprende más, mejor y más rápido: los medios, componentes del proceso que establecen una relación directa con los métodos, en tanto que el ¿cómo? y el ¿con qué? –preguntas a las que responden– enseñar y aprender, son casi inseparables. En la resolución de problemas la utilización de medios auxiliares heurísticos como diagramas, tablas, esquemas, esbozos gráficos y otros constituyen una herramienta poderosa para la interpretación de los mismos y la posibilidad para concebir adecuadamente un plan de solución. Además, facilitan la fijación de las acciones a desarrollar en la solución de problemas nuevos, permiten el desarrollo de los procesos lógicos con que opera el pensamiento y garantizan la representación de situaciones extra matemáticas al lenguaje matemático. Es conveniente señalar que los medios creados para la enseñanza de la resolución de problemas son muy variados y dependen tanto de la naturaleza del problema como de la creatividad de profesores y alumnos ya que "... existen tantas maneras de enseñar eficazmente a pensar matemáticamente cómo existen profesores de talento" (Ballester, 1992).

La forma fundamental de organización de la enseñanza es la clase. En esta, el trabajo frontal del profesor, en grupos o individual, constituyen formas de organizar el trabajo de los alumnos. Estas ofrecen al profesor la posibilidad de utilizarlas convenientemente para lograr un aprendizaje más efectivo a partir de la atención a las diferencias individuales de los alumnos con alto, mediano o bajo rendimiento.

Finalmente, la evaluación sirve como proceso o vía de control y responde al logro del objetivo. Se evalúa de acuerdo a cómo se enseña, es decir al método, lo que permite establecer la tríada dialéctica Objetivo-Método-Evaluación. Por tanto, la evaluación en la enseñanza impone retos al estudiante, es el proceso en el cual este se enfrenta a una nueva situación y es capaz de resolverla con lo que ha aprendido. Es de carácter permanente y se realiza con el propósito de diagnosticar y controlar los resultados en su desempeño, para valorar sus logros e insuficiencias, alcanzadas frente a los objetivos propuestos y buscar soluciones que permitan fortalecer, orientar y reorientar el proceso educativo. Además, identificar si el aprendizaje realizado ha sido significativo, si pone de manifiesto sus motivaciones, intereses, sentimientos, actitudes y valores.

Después de realizar un análisis del significado de cada uno de los componentes del proceso de enseñanza-aprendizaje, en términos de la resolución de problemas, es conveniente aclarar que la tarea fundamental de la Didáctica de la Matemática es mostrar formas eficaces para enfrentar este proceso y sin duda alguna en la resolución de problemas la utilización de la heurística constituye la vía más efectiva para alcanzar el conocimiento. A juicio de los autores, la heurística como capacidad del hombre para realizar innovaciones positivas o para resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente, investiga las formas y métodos que facilitan la búsqueda de vías de solución a tareas de carácter no algorítmico a través de los conocidos principios, reglas, estrategias y programas heurísticos.

## Materiales y métodos

Esta propuesta se implementó en uno de los dos grupos del primer ciclo (seleccionado de forma aleatoria), de la carrera de Ciencias Experimentales de la Universidad Nacional de Educación en el primer período académico de 2018. Se utilizaron métodos del nivel empírico y teórico. También la prueba de Kolmogorov-Smirnov para una población, para determinar la tendencia de los resultados obtenidos en las encuestas aplicadas a los alumnos, la prueba de Mann-Whitney, la de los Signos y la de Homogeneidad Marginal para analizar los resultados de las pruebas pedagógicas aplicadas durante el cuasiexperimento y la regresión múltiple y el cálculo del coeficiente Alfa de Cronbach para determinar la validez y fiabilidad de las encuestas. La implementación de la propuesta estuvo basada en el Programa Heurístico General, mediante etapas y tareas:

1. Orientación hacia el problema. Es importante señalar que, para el desarrollo con éxito de cualquier actividad en la vida, la motivación ocupa un lugar central, si no se está motivado por la actividad que realiza seguramente el resultado que obtendrá no será el mejor, de ahí que la resolución de problemas como actividad de pensamiento requiera que los alumnos se sientan motivados, consideren este proceso como importante, interesante y de descubrimiento. Esto pone a los docentes ante un nuevo reto, proponer problemas actuales, amenos, interesantes, vinculados con el entorno en el que se desarrollan los alumnos y que propicien en ellos contradicción, motivación y transformación.

   La comprensión del problema es un proceso tanto psicológico como cognitivo ya que el alumno comprende el problema cuando es capaz de reproducirlo con sus palabras y analizar cuáles son sus componentes esenciales, en otras palabras, debe ser capaz de interpretar cuáles y qué representan los datos, qué se quiere y cómo se traduce en términos conocidos. Para ello es necesario responder una serie de preguntas después de leerlo y releerlo: ¿De qué trata el problema?, existen algunas palabras o frases que no comprendas, ¿qué conozco?, ¿qué no conozco?, ¿qué se busca?, ¿determinan los datos la solución del problema?, ¿no son suficientes los dados? ¿sobra algún dato?, ¿puedo decirlo de otra forma?, ¿puede hacerse un esbozo o gráfico que esclarezca la situación?

2. Trabajo en el problema. Para facilitar la búsqueda de la vía de solución pueden sugerirse algunas actividades: Formular las relaciones entre los datos y la incógnita; tratar de relacionar el problema con otro conocido; transformar la incógnita acercándola a los datos o introducir una nueva; transformar los datos, obtener nuevos elementos más próximos a la incógnita; recordar la solución de ejercicios análogos; analizar si se han tenido en cuenta todos los datos; generalizar el problema si es posible y analizar casos particulares; resolver problemas parciales (considerar solo una parte de las condiciones); hacer gráficos que ilustren las relaciones encontradas.

3. Solución del problema. En esta etapa es necesario plantearse preguntas como las siguientes: ¿Es correcto lo que hice?, ¿es posible comprobar la solución?, ¿cómo hacerlo?, ¿es posible resolver el problema por una vía más corta?, ¿qué otro resultado se puede obtener por esta vía?, ¿para qué otra cosa me sirve?

Evaluación de la solución y de la vía. En esta etapa es necesario plantearse y responder preguntas como las siguientes: ¿Satisface el resultado lo que se busca en el problema?, ¿cómo comprobar la solución encontrada?, ¿por qué lo realizó así?, ¿qué procedimientos se emplearon para llagar a la solución?, ¿qué resultó menos comprensible en el texto, por qué?, ¿qué le resultó más sencillo? ¿Por qué? ¿Qué errores cometió? ¿Por qué los cometió? ¿Cómo podía evitar equivocarse? No encontró otra vía para llegar al resultado. ¿Por qué? Intente buscar otras vías de solución.

> Para evaluar la vía de solución se hacen consideraciones retrospectivas, se retoman los procedimientos y métodos utilizados para el plan de solución, ampliando así los conocimientos de los alumnos sobre métodos, recursos heurísticos y formas de trabajo y pensamiento que posibilitan un trabajo exitoso en problemas posteriores. Se hacen consideraciones perspectivas sobre la existencia de otras vías de solución y la posibilidad de utilizar la vía de solución seguida en problemas semejantes, pueden además variarse las condiciones del problema manteniendo la misma modelación.

## Resultados y discusión

Al inicio del cuasiexperimento no había diferencias significativas en cuanto a los procedimientos para la resolución de problemas utilizados por los docentes en formación, como se muestra en la figura 1 y constatado con la Prueba de Mann-Whitney.

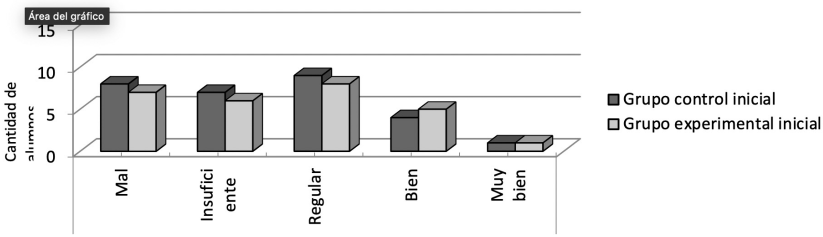



*Figura 1 Comparación de los resultados de la prueba pedagógica inicial en los grupos experimental y de control.*

La prueba de los Signos, arrojó que hay diferencias significativas en los procedimientos de resolución de problemas empleados por los docentes en formación, una vez aplicada la propuesta que se presenta.

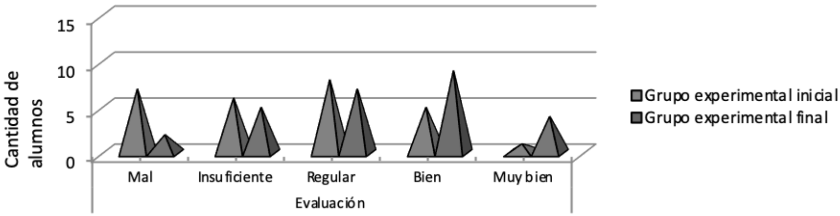



*Figura 2 Comparación de los resultados de las pruebas pedagógicas inicial y final en el grupo experimental.*

Para constatar si los cambios en el aprendizaje son significativos o no se aplicó la Prueba de Homogeneidad Marginal, la que arrojó que los cambios son significativos en sentido positivo, lo que quiere decir que hay una tendencia significativa a cambiar positivamente. En el aprendizaje de los alumnos se obtuvieron buenos resultados, lo que se comprueba en las clases observadas y el desempeño de estos en las mismas. También se alcanzaron resultados positivos desde el punto de vista formativo. Se corroboró que la aplicación del Programa Heurístico General en la resolución de problemas, vinculada a los componentes didácticos del proceso de enseñanza-aprendizaje, es válida, lo que se constata en una mejor evaluación de los indicadores que se midieron durante el proceso investigativo.

## Conclusiones

En el proceso de resolución de problemas es esencial declarar la importancia del uso de elementos heurísticos, especialmente el Programa Heurístico General y los Medios Auxiliares Heurísticos, para encontrar la vía de solución de los mismos y para el desarrollo de los procesos lógicos con que opera el pensamiento. Al enfrentar el proceso de resolución de problemas deben estar aseguradas las condiciones previas que se requieren. Por las exigencias a la actividad mental, esfuerzo y dedicación que requieren desplegar los alumnos para resolver problemas, se debe potenciar su capacitación tanto en actividades docentes como extradocentes. Estas ideas fueron implementadas en la asignatura Matemática en la Educación Básica con docentes en formación del primer ciclo de la Carrera de Ciencias Experimentales, con muy buenos resultados.

**Referencias bibliográficas:**

Ballester, S et al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*, Tomo I. Pueblo y Educación, Cuba.

Castellanos, D. et al. (2001). *Hacia una concepción del Aprendizaje Desarrollador.* Cuba: Pueblo y Educación.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D. F.: Trillas.

Stresikosin, V. (1976). *Sobre la organización del proceso didáctico*. Cuba: Pueblo y Educación.

# La gamificación como estrategia didáctica para potenciar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de EGB

**Mónica Ruiz Padilla**
**Luis Guzmán Salazar**
**Diego Quito Barbecho**
Universidad Nacional de Educación

**Resumen**

La presente investigación consiste en aplicar la gamificación como estrategia didáctica que contribuya en el aprendizaje de las matemáticas básicas, relacionado con la toma de datos y gráficas estadísticas, en estudiantes de noveno año de Educación General Básica. La gamificación es una técnica de aprendizaje poco usada y reportada en el ámbito ecuatoriano. La estrategia se basa en enseñar matemáticas a través del juego con el fin de generar interés, motivación, participación activa en la resolución de problemas y el desarrollo de Destrezas con Criterio de Desempeño (DCD). Para este trabajo se utilizó el método Inductivo e Investigación Acción Participativa (IAP). Las técnicas empleadas para la recolección de datos son: observación participante, Lesson Study y análisis documental. Los instrumentos aplicados fueron los correspondientes a las técnicas: elaboración de diarios de campo, las planificaciones de Lesson Study y guía de análisis documental. Para el análisis de los resultados se usó triangulación de datos. En conclusión, se demuestra que la aplicación de la gamificación como estrategia didáctica contribuye en el mejoramiento de resultados en las DCD, obteniéndose un mejor rendimiento en la resolución de problemas referente a estadística: medidas de tendencia central y gráficos estadísticos.

**Palabras clave:** Gamificación, Lesson Study, Destrezas con criterio de desempeño.

## Introducción

### 1. Justificación y planteamiento del problema

En la actualidad, estudiantes que están aprendiendo con docentes que implementan el método tradicional están adquiriendo algunos problemas en el desarrollo de sus competencias profesionales. Se requiere acción inmediata para atender estos casos, y una solución es transformar la educación mediante nuevos modelos didácticos y estrategias de enseñanza que permitan a los estudiantes explorar e impulsar sus habilidades y destrezas cognitivas para mejorar su proceso de aprendizaje. El resultado de las pruebas PISA-D de matemáticas han servido como un indicador para conocer el desempeño académico de los estudiantes de Ecuador a nivel nacional y en comparación con estudiantes de países semejantes de América Latina y el Caribe (ALC) y naciones de la OCDE, según el Informe de los resultados de PISA para el Desarrollo emitido por OCDE 2018, indica que los estudiantes ecuatorianos están por debajo del nivel básico de competencias de matemáticas. El 70,9% de los estudiantes no alcanzan el nivel básico y otros están por debajo del nivel 1 de desempeño escolar. Se evidencia que es necesario innovar en la educación para la enseñanza de las matemáticas; es por ello que se ha decidido buscar nuevas estrategias de enseñanza para impulsar el aprendizaje de las matemáticas. Se considera que la gamificación es una de las estrategias de enseñanza que fortalece el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, debido a que los estudiantes recuerdan aproximadamente el 70% de lo que hacen o digan, lo que garantiza que recordaran conocimientos adquiridos para enfrentarse a situaciones donde se requiera su desempeño académico.

### 2. Objetivos

Objetivo general.

— Potenciar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de EGB con la estrategia didáctica de gamificación.

Objetivos específicos

- Indagar sobre estrategia de enseñanza la gamificación enfocadas al aprendizaje de las matemáticas.
- Diseñar y adaptar la estrategia de enseñanza gamificación a la Lesson Study para los estudiantes de noveno EGB.
- Implementar gamificación como estrategia de enseñanza mediante Lesson Study.
- Analizar los resultados mediante la triangulación de datos.

## Marco teórico

**Estrategia didáctica** se definen a las acciones planificadas por el docente con el objetivo de que el estudiante logre la construcción del aprendizaje y se alcancen los objetivos planteados.

Dentro de estrategia didáctica se contempla a las denominadas estrategias de enseñanza y de aprendizaje, que es reconocido como "un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) que un estudiante adquiere y emplea en forma intencional como instrumento flexible para aprender significativamente y solucionar problemas y demandas académicas" (Díaz Barriga y Hernández Rojas, 1998, p. 115): mientras que una **estrategia de enseñanza** se denomina a las habilidades y competencias que utiliza el docente para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje con los estudiantes (cómo el docente imparte sus clases).

**El término gamificación** es documentado por primera vez en el año 2008 (Deterding, Dixon, Khaled y Nacke, 2011). Gamificación se define como "un proceso relacionado con el pensamiento del jugador y las técnicas de juego para atraer a los usuarios y resolver problemas" y fue utilizado, en un inicio, por empresas para persuadir y atraer mediante la aplicación del juego a clientes para adquirir o a realizar acciones que dicha agrupación promociona (Zichermann y Cunningham, 2011). Pero "realizar juegos en contextos no lúdicos" se ha convertido en una de las definiciones más utilizadas en las investigaciones de gamificación enfocadas al contexto educativo. Lo cierto es que todavía no existe un consenso sobre el significado y los límites de este concepto (Seaborn y Fels, 2015). Otra definición bastante usada en el ámbito educativo es la de Hanus y Fox (2015). La gamificación consiste en aplicar los elementos propios del juego a contextos ajenos al juego. La gamificación busca integrar elementos de los juegos hacia actividades que no pertenecen a los juegos para promover a través de estos métodos la participación de los usuarios y generando así un compromiso por la tarea Nahm Telaprolu, Rallapalli y Venkata (2014). En estas definiciones se hace hincapié que la gamificación no se trata de un juego, sino que integra los juegos con el aprendizaje en el aula.

**Gamificación y su aplicación en el escenario educativo: área de matemáticas**

El estudiante de la actual era, ha crecido y desarrollado rodeadosde nuevas tecnologías (Fernández, Olmos y Alegre, 2016), razón por la cual es necesario reinventar el pensamiento pedagógico y buscar nuestras estrategias didácticas que ayuden a los estudiantes a mejorar su proceso de aprendizaje. Al aplicar gamificación en la educación se potencia el aprendizaje y el juego puesto que se crea un proceso educativo y formativo que ayuda a los estudiantes en su motivación y predisposición para realizar actividades que fortalezcan el aprendizaje. Además, la gamificación en la educación incorpora elementos del diseño del juego para aprovecharlos en el contexto educativo. Esto quiere decir que no se trata de utilizar juegos en sí mismos, sino tomar algunos de sus principios o mecánicas tales como los puntos o incentivos, la narrativa, la retroalimentación inmediata, el reconocimiento, la libertad de equivocarse, etc., para enriquecer la experiencia de aprendizaje (Deterding et al., 2011; Kim, 2015).

La gamificación se usa como una estrategia didáctica motivacional en el proceso de enseñanza-aprendizaje para provocar comportamientos específicos en el alumno dentro de un ambiente que le sea atractivo, generando un compromiso con la actividad en la que el alumno participa y que apoye al logro de experiencias positivas para alcanzar un aprendizaje significativo.

Para demostrar que la gamificación potencia en aprendizaje se presenta la pirámide de aprendizaje de la Teoría de Elección, Figura. 1, por William Glasser (1998). En esta pirámide Glasser describe los porcentajes de la facilidad que tienen los estudiantes para recordar sus conocimientos después de un cierto tiempo.

Con gamificación se apuesta por lograr que los estudiantes recuerden sus conocimientos adquiridos en un 80%; con este nivel los estudiantes son formados de manera autónoma, es decir, son protagonistas de las actividades académicas. Si bien los estudiantes recuerdan en su mayoría lo que hacen, escriben, interpretan y participan, con gamificación realizan, desarrollan dichas habilidades cognitivas; por lo tanto, el aprendizaje significativo es guardado en su memoria a largo plazo, según esta teoría.


*Figura 1. Cómo aprendemos, Glasser (1998).*

A lo largo de la trayectoria educativa "se sostiene que el rechazo hacia las matemáticas ya es evidente en el tercer año de primaria" (Míguez, 2004), este comentario sirve como indicador para determinar qué se necesita realizar varios cambios a la estrategia didáctica para enseñar matemáticas. Se considera que los alumnos se desarrollan académicamente mejor en ambientes cómodos donde puedan explorar sus capacidades y habilidades cognitivas; con gamificación los estudiantes tienen la oportunidad de aprender haciendo, con el fin de garantizar a sí mismos un aprendizaje significativo. Utilizar gamificación dentro del proceso enseñanza-aprendizaje puede modificar de manera positiva las prácticas de enseñanza de modelos pedagógicos tradicionales, concibiendo a esta como innovación indudable para mejorar el proceso educativo (Christensen y Raynor, 2013). Según Werbach (2013) los fundamentos la gamificación son las dinámicas, mecánicas y los componentes. Las mecánicas son los procesos que provocan el desarrollo del juego y los componentes son las implementaciones específicas de las dinámicas y mecánicas: avatares, insignias, puntos colecciones, rankings, niveles, equipos, entre otros (Ortiz-Colón, Jordán, & Agredal, 2018).

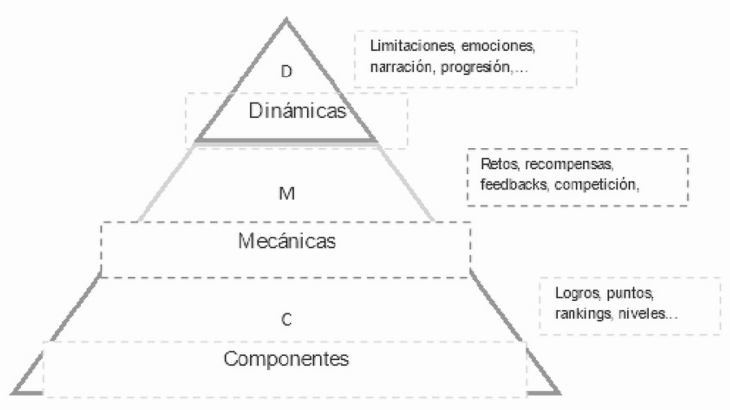



*Figura 2. Pirámide de los elementos de gamificación, interacción entre los tres fundamentos de gamificación.*

Antes de diseñar un ambiente gamificado para una clase, un tema o todo un curso, el profesor debe establecer un objetivo por el cual desea implementar esta tendencia. Ya sea para mejorar la participación en un grupo de bajo desempeño, incrementar las habilidades de colaboración, motivar a que los estudiantes entreguen su tarea a tiempo, entre otros. Tener un objetivo claro al gamificar hace más fácil diseñar el curso y posteriormente evaluar si este se cumplió.

### 1.3.2 Lesson Study

Lesson Study es un trabajo de investigación con sistemas de aprendizaje que desarrolla un grupo de docentes mediante las prácticas educativas en un período de tiempo planificado para diseñar, experimentar y analizar el desarrollo de una lección o clase con el fin de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. (Stiegler y Hiebert, 1999).

La Lesson Study se realiza mediante 7 etapas que son: 1. Definir el problema. 2. Diseñar cooperativamente una "lección experimental". 3. Enseñar y observar la lección. 4. Recoger las evidencias y discutir. 5. Analizar y revisar la lección. 6. Desarrollar la lección revisada en otra clase y observar de nuevo. 7. Discutir, evaluar y reflexionar sobre las nuevas evidencias y diseminar la experiencia. (Pérez y Soto, 2011).

## Materiales y métodos

La siguiente investigación está desarrollada con los métodos Inductivo e Investigación Acción Participativa (IAP**)**. Para la recolección de los antecedentes ocurridos durante las sesiones donde se desarrolló este trabajo se han realizado **diarios de campo y Guías de observación;** la docente tutora del aula en estudio proporciona las Planificaciones de Unidad Didáctica (**PUD**) mismas que sirven para iniciar con esta pesquisa.

Una de las metodologías para mejorar las prácticas educativas es Lesson Study (LS), según (Pérez y Soto 2015). LS son un conjunto de prácticas, hábitos académicos, relaciones interpersonales y herramientas que permiten al docente trabajar de manera cooperativa dentro del entorno educativo e investigación acción participativa, además planificar mediante Lesson Study ayuda a los docentes en fortalecer sus competencias profesionales fomentando un pensamiento crítico y práctico dentro de entorno académico.

Para desarrollar Lesson Study, Pérez y Soto recomiendan seguir las siguientes etapas:

1. **Definir el problema:** en esta fase se debe encontrar un foco y objeto de una clase difícil de enseñar, en esta investigación; se ha de seguir la temática planificada por la docente, el tema encomendado es "Medidas de tendencia central".

2. **Diseñar cooperativamente una "lección experimental":** se elabora una planificación, el diseño de estrategia didáctica fue tomada de Gutiérrez (2018). En este caso se prepara una clase con actividades a desarrollarse en 40 minutos con gamificación como estrategia didáctica, mismas que están enfocadas a las concepciones constructivistas de la misión y visión de la Unidad Educativa Chordeleg y el Ministerio de Educación (MIES).

3. **Enseñar y observar la lección:** se obtiene una rúbrica que contengan criterios pertinentes a la evaluación de una clase con estrategia didáctica como gamificación.

4. **Recoger las evidencias y discutir:** está dedicada a enseñar la clase y desarrollar la planificación elaborada en fase dos. Uno de los investigadores asume el rol de docente mientras que los demás se dedican a la minuciosa observación y evaluación de la Lesson Study 1; es aquí donde se debe recolectar los datos en diarios de campo y rúbrica diseñada en la fase tres.

5. **Analizar y revisar la lección:** aquí se procede a revisar, analizar y discutir los resultados obtenidos de la clase desarrollada; para ello se utiliza los diarios de campo, guía de observación y rúbrica de evaluación.

6. **Desarrollar la lección revisada en otra clase y observar de nuevo:** se repite el ciclo; luego de identificar los puntos débiles ocurridos en la última clase, conjuntamente con los investigadores se planifica una nueva clase (Lesson Study 2) con el fin de mejorar los factores en déficit. Para la siguiente clase se desarrolla el tema "Ilustración mediante gráficos estadísticos".

7. **Discutir, evaluar y reflexionar sobre las nuevas evidencias y diseminar la experiencia:** En esta última fase, se analiza los resultados de la Lesson Study con el fin de mejorar las prácticas docentes y lograr un mejor aprendizaje en los alumnos para las clases de matemáticas.

Cabe recalcar que la implementación de la Lesson Study en las aulas de clase permite a los docentes reflexionar sobre sus prácticas y a los estudiantes mejorar su aprendizaje. (Cheung y Wong, 2014).

Es necesario señalar que este trabajo investigativo fue desarrollado con la participación de 32 estudiantes (toda el aula de clase, hombres y mujeres); no hubo criterios de exclusión de los participantes pertenecientes a noveno de EGB de la Unidad Educativa Chordeleg.

Finalmente, para la discusión de resultados se realiza una triangulación de datos en la que se utiliza diarios de campo, guías de observación y rúbricas de evaluación, mismas que fueron elaboradas durante y después de la cada sesión de observación participante.

## Resultados

Para analizar los datos se ha tomado las evidencias recogidas en los diarios de campo, guías de observación, planificaciones PUD.

| INDICADOR CON RESPECTO A LA PIRÁMIDE DE GAMIFICACIÓN. | CLASE DEMOSTRATIVA | LESSON STUDY 1 | LESSON STUDY 2 |
|---|---|---|---|
| **Dinámicas** | - No se evidenció gamificación durante la hora de clases.<br>- Los estudiantes se desarrollan dentro de un entorno de enseñanza tradicional con clases magistrales. | - Los estudiantes comprendieron el objetivo de la actividad.<br>- Se desenvuelven de forma autónoma y fortalecen relaciones interpersonales.<br>- Aplican conocimientos previos y sus capacidades y habilidades cognitivas para desarrollar las actividades de gamificación. | - Los estudiantes demostraron sus capacidades y habilidades cognitivas para desarrollar la planificación.<br>- Los estudiantes conciben a las matemáticas como una asignatura divertida debido a que tienen la oportunidad de teorizar la práctica. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Mecánicas** | - Los estudiantes trabajan de manera individual en sus cuadernos de trabajo y el apoyo del texto (libro de matemáticas 9° EGB).<br>- Los estudiantes, según Glasser (2013) tienden a recordar solo el 20% del conocimiento adquirido. | - Mediante los juegos grupales se evidencia la cooperación y competición para cumplir con el objetivo planteado dentro del grupo de trabajo.<br>- El tiempo restringido en cada actividad de gamificación ayuda a concretar los esfuerzos de cada integrante para resolver la tarea en el tiempo previsto.<br>- La presentación de los resultados de cada actividad (puntajes) generó reputación, credibilidad y reconocimiento. | - Al seguir con la misma temática los estudiantes fueron capaces de vincular la realidad con la teoría.<br>- Los estudiantes se motivan por la competición y por conseguir un logro al cumplir el objetivo planteado.<br>- Se evidenció actitudes como la resiliencia y la tolerancia a la frustración. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Componentes** | - Los estudiantes resuelven los ejercicios encomendados por el docente con el fin de tener la satisfacción de cumplimiento. | - En el transcurso de la primera actividad el andamiaje fue un factor que les ayudó a desarrollar habilidades cada vez más complejas o difíciles.<br>- Los estudiantes esperan con buenas expectativas ser mejores que sus oponentes. | - Los estudiantes trabajaron en grupo corrigiendo sus errores de manera rápida y precisa para mejorar su puntuación.<br>- Los estudiantes fortalecieron sus relaciones interpersonales y mejorar su capacidad comunicativa. |

## Conclusiones

Con respecto a la investigación realizada se determina que la implementación de gamificación como estrategia didáctica fortalece el aprendizaje de las destrezas con criterio de desempeño (DCD) de los estudiantes en la asignatura de matemática. El desarrollo de las clases mediante gamificación ha permitido que los estudiantes reconozcan sus capacidades y habilidades para resolver problemas matemáticos: estadística, y a la vez adquieren un pensamiento perceptivo positivo de las mismas, es decir, desarrollar clases de matemáticas con gamificación ayuda a romper estereotipos sobre las matemáticas, misma que es concebida como una de las materias más complejas.

La gamificación, a más de mantener a los estudiantes activos durante las clases de matemáticas, ha influido en la memoria de los alumnos, puesto que se ha notado que los educandos pueden recordar sus conocimientos adquiridos con mayor facilidad, esto es que pueden recordar hasta el 80% de los conocimientos si estos son adquiridos cuando toman el papel de creador de aprendizajes. El trabajo colaborativo llevó a los estudiantes a ponerse a la par en la comprensión de técnicas de cálculo en matemáticas. La aplicación de Lesson Study al aula de clases logró una crítica constructiva y un mejoramiento de las siguientes sesiones en las que se aplicó la gamificación.

**Referencias bibliográficas:**


Cheung, W. y Wong, W. (2014). Does Lesson Study work?: A systematic review on the effects of Lesson Study and Learning Study on teachers and students. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 3 (2),* 137-149.

Christensen, C. y Raynor, M. (2013), The innovator's solution: Creating and sustaining successful growth. Harvard, Harvard University Press.

Fernández, A., Olmos, J., y Alegre, J. (2016). Valor pedagógico del repositorio común de conocimientos para cursos de dirección de empresas. *@tic: revista d'innovació educativa., 16.* 39-47

Hanus, M. D., & Fox, J. (2015). Assessing the Effects of Gamification in the Classroom: A Longitudinal Study on Intrinsic Motivation, Social Comparison, Satisfaction, Effort, and Academic Performance. Computers & Education, 80 January 2015, 152-161

Miguez, M. (2004). El rechazo hacia las matemáticas. Una primera aproximación. *Acta Latinoamericana de matematicas educativa,*17, 292-298.

Melo-Solarte, D. S., & Díaz, P. A. (2018). El Aprendizaje Afectivo y la Gamificación en Escenarios de Educación Virtual. *Información Tecnológica*. https://doi.org/10.4067/s0718-07642018000300237

Nahm, F. F. H., Zeng, Q., Telaprolu, V. R., Ayyappa, A. P., & Eschenbrenner, B. (2014). Gamification of education: a review of literature. International Conference on HCI in Business, 1, 401-409.

Ortiz-Colón, A.-M., Jordán, J., & Agredal, M. (2018). Gamificación en educación: una panorámica sobre el estado de la cuestión. *Educação E Pesquisa*. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844173773

Pérez A. y Soto E. (2015 A). Lesson Study:la mejora de la práctica y la investigación docente. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 83 (29.2)*, 64-67.

Pérez, A. y Soto, E. (2015). Lessons Studies: un viaje de ida y vuelta recreando el aprendizaje comprensivo. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 83 (29.2)*, 15-28.

Pruebas PISA 2018, resultados, disponible en: http://www.evaluacion.gob.ec/evaluaciones/pisa-documentacion/

Seaborn, K. y Fels, D.I. (2015). Gamification in theory and action: A survey, *International Journal of Human-Computer Studies*, *74.* 14-31.

*Zepeda - Hernández, S., & Abascal-Mena, R., & López-Ornelas, E. (2016). Integración de gamificación y aprendizaje activo en el aula. Ra Ximhai, 12 (6), 315-325.*

# Competencia digital y su impacto en la enseñanza–aprendizaje de la matemática

**Jorge Enrique Revelo-Rosero**
Universidad UTE - Universidad Central del Ecuador

**Edwin Vinicio Lozano**
**Paco Bastidas Romo**
Universidad Central del Ecuador

## Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar el nivel de impacto que la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. La tendencia mediática por el uso masivo de tecnologías móviles con conexión a Internet, son directrices que generan cambios en la forma de aprender y acceder al conocimiento en una sociedad digitalizada. Este estudio es de enfoque cuantitativo no experimental descriptivo. Se diseñó y aplicó una encuesta a una muestra de 150 estudiantes y profesores del área de matemáticas de nivel medio de Ecuador. Los resultados muestran que la mayoría de los encuestados tienen opiniones negativas acerca del impacto que tiene la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, no por el desconocimiento de su aplicación, sino por falta de conocimiento y dominio para aplicarlas en la docencia.

Palabras clave: TIC, matemáticas, competencias digitales, educación media

## 1. Introducción

Hoy en día, nuestra sociedad vive en constante cambio. La evolución de la ciencia y la tecnología que va de la mano de los procesos de transformación en la economía, la política, la cultura, el medio ambiente y por tanto, en las formas de enseñar, aprender, comunicar y trabajar. Por tanto, surge la necesidad de mejorar la calidad de la educación en todos los niveles del quehacer educativo. En este escenario, es importante echar una mirada al desempeño del docente en la educación actual, que no solo exige mejorar sus competencias docentes sino que debe adecuarse a las exigencias de la sociedad de la información y el conocimiento, preparar a los estudiantes universitarios para el desarrollo nuevas competencias de aprendizaje que les permita insertarse en el campo social, económico, político, cultural y profesional.

Para ello se debe mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje, el uso de nuevos materiales y recursos, de nuevas formas de enseñar y aprender, nuevas metodologías didácticas, en suma, el docente debe estar en capacidad de desarrollar nuevas competencias docentes y competencias digitales que satisfagan las exigencias de sociedad actual, llamada también sociedad de la información; el conocimiento en un universo complejo y en permanente cambio.

En este escenario, los sistemas educativos de los países en desarrollo, en particular los latinoamericanos, consideran que todos estos avances tecnológicos implican grandes oportunidades y desafíos, para docentes y estudiantes, principalmente en el desarrollo de nuevas competencias de enseñanza-aprendizaje que les permita insertarse en el campo laboral y profesional.

Este proceso involucra, la formación continua y permanente del profesorado en competencias y capacidades integrales, factores claves para su desarrollo profesional en el ámbito educativo.

En este contexto, surgen las interrogantes:

— ¿Es necesario integrar la competencia digital docente en el proceso de enseñanza—aprendizaje de la matemática en la educación media?
— ¿Tiene impacto la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza—aprendizaje de la matemática a estudiantes de educación media?

Para dar respuesta a las interrogantes planteadas, se establecieron los objetivos siguientes:

— Determinar el nivel de conocimiento y dominio de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
— Analizar el nivel de impacto que la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a estudiantes de educación media.

## 1. La competencia digital

La "competencia digital forma parte de las competencias docentes que caracterizan el perfil profesional del profesor de educación superior" (Carrera y Coiduras, 2012), convirtiéndose por tanto, en una de las competencias básicas del profesor universitario del siglo XXI, provocando consigo que la revolución digital esté llegando a las aulas universitarias a gran velocidad, introduciendo mejoras en los procesos de innovación en docencia y gestión, lo que ha propiciado un cambio en el perfil del docente y el estudiante universitario (Esteve y Gisbert, 2012; Cabero, 2013; Cózar y Roblizo, 2014; Silva, Miranda, Gisbert, Morales y Onetto, 2016).

La Comisión Europea del Parlamento Europeo y del Consejo (Comisión Europea, 2006) recomienda ocho competencias clave para la sociedad de conocimiento entre las que se incluye a la competencia digital, ya que tiene la necesidad de formar a sus ciudadanos de manera que "les permita desarrollar los valores que sustentan la práctica de la ciudadanía democrática, la vida en común y la cohesión social, que estimule en ellos y ellas el deseo de seguir aprendiendo y la capacidad de aprender por sí mismos. Además, supone ofrecer posibilidades a las personas jóvenes y adultas de combinar el estudio y la formación con la actividad laboral o con otras actividades" (Revuelta, 2011). Por tanto, define a "La Competencia digital implica el uso crítico y seguro de las Tecnologías de la Sociedad de la Información para el trabajo, el tiempo libre y la comunicación. Apoyándose en habilidades TIC básicas: uso de ordenadores para recuperar, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información y para comunicar y participar en redes de colaboración a través de Internet" (Comisión Europea, 2006)

En este escenario, las instituciones de educación superior tienen el enorme compromiso de replantearse nuevas prioridades educativas en el ámbito educativo, orientando la concepción de la educación y sus enfoques pedagógicos hacia una visión integral y holística del quehacer educativo. La tecnología proporciona una amplia gama de recursos disponibles para apoyar el aprendizaje de la matemática (Revelo, Revuelta y González-Pérez, 2018) dentro y fuera del aula, experimentado ingentes cambios dentro del sistema educativo actual.

Así, el papel a jugar por las TIC en el proceso educativo es relevante ya que aportan la posibilidad de flexibilizar y mejorar procesos que inciden directamente en el aprendizaje, la organización escolar o la comunicación con la comunidad, entre otros (González-Pérez y De Pablos, 2015). En este contexto, el proceso de implementación de la competencia digital al ámbito educativo, depende de los recursos tecnológicos con los que cuentan las instituciones educativas, y de las facilidades de acceso para insertarlas a la práctica pedagógica. Para ello es importante la formación permanente del profesorado sobre la importancia de dominar los medios digitales, de igual modo, en aptitudes y técnicas relacionadas para implementar prácticas pedagógicas innovadoras en el aula con TIC (Revelo, 2017).

En este sentido, es importante, destacar que la formación permanente del docente debe ser una de las principales líneas de acción del Estado ecuatoriano, sobre todo ahora que el uso de las tecnologías móviles (teléfonos inteligentes, tabletas, PDA, laptops, entre otros) por nuestros estudiantes, facilitan la implementación de metodologías más dinámicas, flexibles y abiertas para el aprendizaje de la matemática.

## 2. Desarrollo de la competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

La rápida evolución digital de las TIC cada vez más especializada que ha transformado el Internet (Castells, 2008). La relación de la competencia digital con la enseñanza de la matemática, ha transformado los procesos de enseñanza de esta importante área del conocimiento, generando nuevos modelos de producir y compartir conocimiento e información mediante la interacción en tiempo real entre estudiantes y docentes, compañeros y consigo mismo a través de la red (Revelo, 2017).

Para poder contribuir al desarrollo de la competencia digital del docente desde el área de la matemática, es necesario ir más allá de una simple definición genérica de la competencia. Para ello es preciso realizar aportaciones que tengan utilidad práctica que trasciendan a las meras aportaciones teóricas. En este contexto, en el área de matemáticas, son muchos los recursos de las TIC que han sido utilizados por el docente para insertarlos a mejorar el aprendizaje de la matemática, entre ellos se describen los blogs, wikis, foros, chats, videos, redes sociales, (…) (Basurto, 2015; López, 2011; López & Eduteka, 2003; Morón, 2013; SCOPEO, 2012) (Ver Tabla 1).

**Tabla 1.**

Desarrollo de la competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

| Ámbito de acción de las TIC | TIC / Software específico | Competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática |
|---|---|---|
| **Gestión de la información y alfabetización informacional** | Navegadores Web (Mozilla, Internet Explorer, Google Chrome, etc.), Google, Google Drive, Dropbox, Wikipedia, Bing, WolframAlpha, blogs, wikis, Redes Sociales, Youtube, Symbaloo, Delicious, Diigo, Scoop.it, Storify | · Uso de navegadores para buscar, localizar y filtrar información, datos y contenidos digitales sobre temas específicos del área de matemáticas.<br>· Organizar, evaluar y clasificar información y contenido digital disponible en la red, con fines educativos que permitan desarrollar el aprendizaje colaborativo en el área de matemáticas.<br>· Almacenar y recuperar información y contenido digital para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. |

| Ámbito de acción de las TIC | TIC / Software específico | Competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática |
|---|---|---|
| **Comunicación y colaboración** | Foros, chats, blogs, wikis, Redes Sociales (Facebook, Twitter, Edmodo, Google+), Colaborativas (Google Drive, Dropbox), Contenido multimedia (Youtube, Prezi, Slideshare, Scrtibd, Flickr), video conferencias, aulas virtuales,… | · Interacción mediante la gestión, uso y aplicación de la comunicación digital.<br>· Comprender el uso adecuado de las distintas formas de comunicación a través de medios digitales.<br>· Compartir información y contenidos digitales a través de los distintos medios de comunicación digitales.<br>· Participación ciudadana en línea, mediante el uso de entornos digitales que propicien el trabajo colaborativo en el área de matemáticas.<br>· Desarrollar trabajo colaborativo mediante el uso canales digitales con el fin de apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.<br>· Utilizar y gestionar actividades de aprendizaje en comunidades virtuales y redes sociales de manera ética, legal y segura, instruyendo a mismo tiempo a sus estudiantes a tener un comportamiento responsable en la red.<br>· Crear, rastrear y transmitir su propia identidad digital al igual que la de sus estudiantes. |

| Ámbito de acción de las TIC | TIC / Software específico | Competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática |
|---|---|---|
| Creación y publicación de contenidos | Blogs, Wikis, Redes Sociales (Facebook, Twitter, Edmodo, Google+), Colaborativas (Google Drive, Dropbox), Contenido multimedia (Youtube, Prezi, Slideshare, Scrtibd, Flickr), video conferencias, aulas virtuales… Conexiones dinámicas manipulables como Geogebra, Cabri, Wimplot, Graph, Realidad Aumentada, WolframAlpha, Mathway, Photomath … | · Aplicación de herramientas de la Web 2.0 para crear materiales educativos digitales (texto, presentaciones, imágenes, videos, tablas, mapas conceptuales) y los comparte en red.<br>· Crea y gestiona espacios de la Web 2.0 donde publica contenidos educativos multimedia (imágenes, infografías, sonidos, animaciones, vídeos…) que se adapten a las necesidades de aprendizaje de la matemática.<br>· Crea y gestiona contenidos específicos de matemáticas mediante el uso de: blogs, wikis, Webquest, contenidos multimedia (videos YouTube, Prezi, Scribd, Slideshare,…), como innovación educativa. |

| Ámbito de acción de las TIC | TIC / Software específico | Competencia digital docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática |
|---|---|---|
| | Herramientas avanzadas de Excel, Cal de libre office, calculadora, Derive, Wiris, wxMaxima, SPSS, Comunidades Ricas en Recursos Matemáticos como Proyectos Descartes, Proyecto Sócrates, Kahn Academy, Eduteka, … | · Conoce, gestiona y utiliza una amplia variedad de conexiones dinámicas manipulables, herramientas avanzadas, comunidades ricas en recursos matemáticos para adaptarlos a las necesidades de enseñanza-aprendizaje de la matemática.<br>· Integra, combina, modifica contenido digital encontrado en la red ajustándolo a sus necesidades y respetando licencias de uso.<br>· Respeta la normativa legal sobre derechos de autor de los contenidos digitales de la red, citando sus fuentes.<br>· Realiza modificaciones en programas informáticos, aplicaciones, configuraciones, programas, dispositivos para usarlos como innovación educativa.<br>· Realiza modificaciones a las funciones avanzadas de medios digitales en relación con las necesidades de su tarea docente.<br>· Realiza modificaciones a software libre con la finalidad de mejorarlo y adaptarlo a las necesidades del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática. |

## 3. Ventajas e inconvenientes del conocimiento y dominio de la competencia digital para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

El desarrollo de la competencia digital permite tanto al docente como al estudiante ir construyendo un puente entre las ideas intuitivas y los conceptos matemáticos formales, proporcionando un ambiente adecuado de aprendizaje mediante la creación de entornos de aprendizaje que involucren el conocimiento, estrategias pedagógicas y la tecnología.

Al respecto autores como Alonso, Casablancas, Domingo, Guitert, Moltó, Sánchez y Sancho (2010), Area-Moreira (2010), Area-Moreira y Ribeiro-Pessoa (2012), Bennett, Bennett, Bishop, Dalgarno,

Waycott y Kennedy, (2012), Buckingham (2009), Cela, Fuentes, Alonso y Sánchez. (2010), Colás y Casanova (2010), Cobo y Pardo (2007), Del Moral y Villalustre (2010), De la Torre (2006), Freire (2007), Kopcha (2012), Molina e Iglesias (2014), Pachler,

Cook y Bachmair, (2010), Revelo (2017), Revuelta y Pérez (2009), Romero (2008), Salinas, Benito y Lizana (2014), Santamaría (2005), Wong, Li, Choi y Lee, (2008), Yang (2012), Zuluaga, Pérez y Gómez (2012), y otros; llegan a la conclusión que la integración de las TIC en la enseñanza de la matemática aporta múltiples ventajas en el mejoramiento de la calidad docente, materializadas en aspectos tales como el acceso desde áreas remotas, la flexibilidad en tiempo y espacio para el desarrollo de las actividades de aprendizaje (Ferro, Martínez, & Otero, 2009). Las TIC permiten además buscar, interactuar, recopilar y procesar información para generar nuevos conocimientos.

**Tabla 2**

Ventajas e inconvenientes del dominio de la competencia digital el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

| **TIC para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática** | |
|---|---|
| **Tipos:** | - Blogs<br>- Wikis<br>- Redes sociales<br>- De colaboración<br>- Marcadores sociales<br>- Contenidos multimedia<br>- Otras herramientas |
| **Ventajas:** | - Facilitan el acceso inmediato a la búsqueda y selección de la información disponible en la Red desde cualquier lugar.<br>- Permiten configurar contenido hipertextual y multimedia sobre cualquier temática, como es el caso de la matemática.<br>- Permiten crear, editar, gestionar, publicar y compartir por los diferentes canales de comunicación digital (foros, chats, blogs, wikis, redes sociales, entre otros) contenidos e información con fines educativos.<br>- Facilitan las relaciones con redes sociales y otras aplicaciones de la red.<br>- Establecen ruptura de las barreras espacio-temporales en las actividades de enseñanza- aprendizaje.<br>- No requiere de grandes conocimientos informáticos, con un nivel de usuario cualquiera puede usar las herramientas Web 2.0.<br>- Facilitan la comunicación e interacción entre los distintos agentes del proceso enseñanza-aprendizaje ya síncrona y asincrónicamente.<br>- Favorecen el trabajo individual, colaborativo y cooperativo de los participantes.<br>- Permiten un alto grado de interdisciplinaridad para la educación ya que permiten romper esquemas tradicionales de enseñanza- aprendizaje dentro y fuera del aula universitaria. |

| TIC para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática | |
|---|---|
| | - Son dinámicas, fomentan procesos formativos abiertos y flexibles para el aprendizaje autónomo y colaborativo de los estudiantes desde cualquier lugar.<br>- Permiten a los estudiantes reflexionar sobre su proceso de aprendizaje.<br>- Permiten el aprendizaje a partir de los errores (Feedback)<br>- Aumentan el interés y la motivación de los estudiantes con dificultades para mejorar su proceso de aprendizaje.<br>- Facilitan la construcción del conocimiento dentro de una comunidad de aprendizaje.<br>- Fomentan el desarrollo y formación del profesorado.<br>- Favorecen la participación docentes y estudiantes en comunidades virtuales y redes sociales, herramientas sociales y colaborativas para promover la reflexión, creación, empoderamiento y auto-desarrollo. |
| **Inconvenientes:** | - Confidencialidad de la información publicada en la Red.<br>- La información y el contenido es público en la Red.<br>- Mucho contenido sin fundamentación científica o fuentes de credibilidad.<br>- Inseguridad del almacenamiento de datos en la Red.<br>- Dependencia completa del acceso a Internet.<br>- Cambios en las condiciones del servicio: pueden ser gratuitas hoy y mañana no.<br>- Vulnerabilidad de la propiedad intelectual-Derechos de autor sobre el contenido e información digital que se publica en la Red.<br>- Desconocimiento y temor al uso y aplicaciones de la Web 2.0 en procesos educativos por los participantes.<br>- La enseñanza es no personalizada.<br>- Exceso de información, la cual es difícil de procesar en su totalidad. |

## Metodología

Se estableció un diseño de investigación no experimental descriptivo con un enfoque cuantitativo que al ser un proceso formal, objetivo y sistemático permitió obtener información cuantificable sobre un fenómeno investigado en forma numérica, mediante el empleo de pruebas estadísticas se pudo describir, explicar y probar las interrogantes planteadas en la misma (Bisquerra 2004). Para la cogida de los datos se diseñó como único instrumento de recolección de información una encuesta estructurada con el fin de obtener la información referente a los objetivos planteados. La encuesta tuvo dos tipos de preguntas cerradas donde se le daba la opción a los encuestados de elegir sí, no y otras de opción múltiple.

## 1. Población y muestra

La población con la cual se trabajó fue de 458, de los cuales 423 son estudiantes de educación media y 35 docentes del área de matemáticas correspondientes a unidades educativas de las provincias de Pichincha, Guayas y El Oro. Para el cálculo de la muestra de la población de 458 estudiantes y docentes, según el caso se utilizó la fórmula estadística para tamaños de población mayor a 10 personas con la cual se obtuvieron 150 unidades muéstrales. Distribuidas de la siguiente manera: 29 docentes del área de matemáticas y 121 estudiantes, a los cuales se les solicitó responder voluntaria y anónimamente la encuesta presentada de manera física con el fin de garantizar los resultados y conclusiones generadas de la información recolegida en la presente investigación. (Ver Tabla 3).

**Tabla 3**

Estrategia probabilística para seleccionar la muestra.

| Provincia | Población | | Muestra | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Estudiantes | Profesores | Estudiantes | Profesores | Total |
| Guayas | 116 | 23 | 40 | 17 | 57 |
| Pichincha | 240 | 8 | 49 | 8 | 57 |
| El Oro | 67 | 4 | 32 | 4 | 36 |
| Total | 423 | 35 | 121 | 29 | 150 |

## 2. Planificación y aplicación del trabajo de campo

**Etapa I:** En esta etapa se determina la presentación del proyecto de investigación dividido en tres planes de titulación. Una vez aprobados los mismos se procede a la búsqueda y revisión de la literatura específica referente al tema de investigación en algunas bases de datos como Education Resource Information Center (ERIC), Scientific Electronic Library Online (SciELO), Dialnet, Google Académico, Tesis en Red (TDR), Tesis Doctorales en Línea (TDX), Tesis Doctorales desde 1976 (TESEO), Scopus (Multiplidisciplinar), Host Research Databases (EBSCO), Biblioteca Digital de la OEI, Biblioteca de la UEX, Eduteka, revistas especializadas, entre otras. Esta etapa de investigación se empezó a desarrollar a partir de abril de 2016.

**Etapa II:** Está determinada por la definición del diseño de la investigación de tipo no experimental de corte cualitativa, enfocado en un sondeo de tipo descriptivo y la definición de la encuesta como técnica para la recogida de la información que busquen dar respuesta a los objetivos planteados.

**Etapa III:** Se diseña la encuesta, se define la población y muestra. La técnica aplicada para la elección de la muestra es de tipo probabilístico, por tanto, para calcular la muestra representativa de la población se utilizó la fórmula estadística. Dadas las características de la investigación, todos los elementos de la población tienen una misma probabilidad de ser elegidos. Una vez establecido el cuestionario se procede a su aplicación de manera física por estudiantes de las Carreras de Educación del Sistema de Educación a Distancia de la Universidad UTE y fue la misma para estudiantes y profesores de unidades educativas de las provincias de Pichincha, Guayas y El Oro, previa autorización de las autoridades académicas y aprobación de los estudiantes y profesores seleccionados al azar para su posterior análisis e interpretación. El tiempo aproximado para contestar el cuestionario fue de 5 a 10 minutos, y la aplicación fue el mes de octubre de 2016.

**Etapa IV:** Se realiza el análisis estadístico e interpretación de los datos recogidos a través del instrumento elaborado para la presente investigación se empleó el método cuantitativo descriptivo de frecuencias y porcentajes de cada una de las variables del presente estudio. El análisis se complementó por medio de distribuciones de frecuencia de tipo bivariado mediante tablas de contingencia, el empleo de las pruebas estadísticas de chi-cuadrado y del coeficiente de contingencia y un nivel de confianza del 95% con el fin de determinar la relación estadística entre las variables cruzadas. Se empleó el programa estadístico SPSS para Windows, versión 22.0. Finalmente, se procede a la redacción y presentación de los resultados junto a la discusión y conclusiones de la presente investigación.

## Resultados

Para dar respuesta a la primera pregunta de investigación ¿Es necesario integrar la competencia digital docente en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la educación media? la muestra de estudio son docentes del área de matemáticas y estudiantes del nivel medio de unidades educativas de Ecuador, de los cuales el 38,0% (n=57) corresponde a la provincia de Guayas, en igual porcentaje a Pichincha y El Oro con el 24,0% (n=36). El perfil general de los encuestados muestra una población de género femenino es casi el doble de la masculina con un 62,7% (n=94), de los cuales 81,9% son estudiantes y el 18,1% son profesoras frente a un 37,3% (n=56) son de género masculino, de los cuales 78,6% son estudiantes y el 21,4% son profesores. En cuanto al nivel de formación académica del profesorado (n=29), se puede observar que un 17,2% (n=5) tienen estudios de Maestría, en igual porcentaje son normalistas; 55,2% (n=16) tienen título de licenciado y un 10,3% (n=3) son bachilleres, lo cual evidencia que el mayor número de profesores son profesionales en educación. En suma, se puede observar que el profesorado del área de matemáticas tiene un interés por mantenerse actualizado.

En lo que respecta a la edad se puede resaltar que la mayoría de la población estudiada pertenece a la "Generación Net" o nativos digitales, términos se utilizan para etiquetar la generación nacida después de 1980, aquellas personas cuyas "preferencias en el aprendizaje tienden hacia el trabajo en equipo, las actividades experienciales, y el uso de tecnología" (Cabra y Marciales, 2009). En la tabla 4, se puede observar que un 93,3% (n=140) de la muestra analizada en esta investigación es menor a 40 años, frente a un 6,7% (n=10) es mayor a 40 años, lo cual evidencia que el mayor número de estudiantes y profesores son nativos digitales y hay un número no muy significativo que sí podría ser considerado como no nativos digitales y , por tanto, en cierta forma la integración de la competencia digital docente a la enseñanza de la matemática es un gran desafío. Investigadores como Wodzicki, Schwämmlein y Moskaliuk, (2012), Bennett, Maton y Kervin, (2008) y De la Hoz, Acevedo y Torres (2015), infieren que los nativos digitales han desarrollado habilidades y destrezas que van de la mano con la evolución de la tecnología y de Internet. Esto hace que existan diferencias entre otras generaciones anteriores en el sentido de afrontar otras dificultades a la hora de implementar cambios en sus formas de aprender cuando se desarrollan competencias digitales.

**Tabla 4**

Rango de edades de la muestra estudiada (n=150).

| Edad | Estudiantes | | Docentes | |
|---|---|---|---|---|
| | n | % | n | % |
| 10 - 15 años | 50 | 33,3% | 0 | 0,0% |
| 16 - 20 años | 65 | 43,3% | 0 | 0,0% |
| 21 - 25 años | 5 | 3,3% | 2 | 1,3% |
| 26 - 30 años | 0 | 0,0% | 5 | 3,3% |
| 31 - 35 años | 0 | 0,0% | 5 | 3,3% |
| 36 - 40 años | 0 | 0,0% | 8 | 5,3% |
| más de 41 años | 0 | 0,0% | 10 | 6,7% |
| Total | 121 | 80,0% | 29 | 20,0% |

Para el tratamiento y análisis de la información cuantitativa, se utilizó el programa estadístico SPSS 22. Para determinar que el cuestionario tenga validez y fiabilidad de constructo, se utilizó la técnica de análisis factorial y alfa de Cronbach respectivamente. Dentro del cuestionario, se agruparon los ítems por dimensiones, y una vez depurado estadísticamente el cuestionario, el factor que incluye los ítems relacionados con el nivel impacto que tiene la integración de las TIC como herramientas para el aprendizaje de la matemática de los estudiantes de educación media mostrando un índice KMO de 0,701 (> 0,5) y un *Alpha de Cronbach* de 0,694 (Alpha Std. = 0,679), valores aceptables para este tipo de análisis. En el cuestionario se les pidió a los docentes y estudiantes encuestados que valoren en una escala tipo Likert de 1 a 5, donde 1 es la de menor puntuación y 5 la máxima los ítems que conforman la misma.

La tabla 5, recoge las respuestas sobre los ítems de la dimensión *Nivel de conocimiento y dominio de la competencia digital para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática* en función de su valoración media y desviación estándar. Los resultados muestran que el factor más relevante tanto para docentes como estudiantes es el de que "considera necesario recibir formación permanente sobre competencias digitales para desarrollar innovaciones educativas y buenas prácticas docentes" (media = 3,39). Por el contrario, el factor con menor impacto es el relacionado con el que "el nivel de formación recibida en su institución educativa sobre el desarrollo de competencia digital para innovar su práctica educativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (media = 1,54). Es decir, que en el 85,7% de los ítems están por debajo de una media del 3,0, lo que muestra una clara tendencia negativa en el nivel de formación en el uso de las TIC como herramientas para el aprendizaje de la matemática. La dispersión de las puntuaciones de cada ítem no es muy grande con respecto a la media (media global = 2,82), debido a que la desviación estándar se encuentra en una escala menor a 1.

**Tabla 5**

Nivel de conocimiento y dominio de la competencia digital para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (n=150).

| II. Nivel de conocimiento y dominio de la competencia digital para el proceso de enseñanza–aprendizaje de la matemática | | Media | Desv. Estándar | N |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Valore el nivel de dominio de la competencia digital para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. | 2,67 | 0,690 | 150 |
| 2 | Conoce los recursos tecnológicos que existen en su institución para el desarrollo de su práctica educativa. | 2,77 | 0,670 | 150 |
| 3 | Considera que el desarrollo de la competencia digital en el aula de clase genera cambios e innovaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. | 2,97 | 0,634 | 150 |
| 4 | Usa las herramientas tecnológicas disponibles en su institución educativa tales como computadores, dispositivos móviles, software de matemáticas, Internet, etc., en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. | 2,91 | 0,780 | 150 |
| 5 | Existe el suficiente apoyo de su institución educativa para incorporar las herramientas tecnológicas como innovación educativa. | 2,43 | 0,789 | 150 |
| 6 | Valore el nivel de formación recibida en su institución educativa sobre el desarrollo de competencia digital para innovar su práctica educativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática | 1,54 | 0,672 | 150 |
| 7 | Considera necesario recibir formación permanente sobre competencias digitales para desarrollar innovaciones educativas y buenas prácticas docentes. | 3,39 | 0,954 | 150 |
| | **Total de la media global** | **2,82** | | |

*** 1 = Muy poco; 2 = Poco; 3 = Suficiente; 4 = Bastante; 5 = Mucho**

Finalmente, para dar respuesta a la segunda interrogante de la presente investigación ¿Tiene impacto, la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a estudiantes de educación media?

La tabla 6, resume los ítems relacionados con el impacto de la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a estudiantes de educación media, en función de su valoración media y desviación estándar. Los resultados determinan que el ítem (10) es el factor más relevante, puesto que, tanto docentes como estudiantes de nivel medio consideran que el desarrollo de la competencia digital mejoraría el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (media = 3,59), lo cual puede tener un efecto contraproducente en sus creencias de que el aprendizaje de la matemática es más eficiente si se desarrolla la competencia digital. Del mismo modo, los ítems referidos a la motivación para el tiempo de uso de recursos tecnológicos (computador, tablets, software de matemáticas, Internet, etc.) serían suficientes para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática; aunque, las medias estén por encima de 3,0 no se aprecia con claridad en la muestra estudiada que el uso de recursos tecnológicos tengan el impacto esperado en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. Por otra parte, el ítem (8) cuya valor de la media es de 2,39 (como el resto de los ítems que se encuentran por debajo de la media 3,0) se refiere a la disponibilidad recursos tecnológicos para el desarrollo de la práctica educativa en cada una de las instituciones de la muestra estudiada es incipiente o poca, lo que demuestra que es un factor muy negativo a la hora de integrar las TIC para el aprendizaje de la matemática. Por otra parte, la dispersión de las puntuaciones de cada ítem no es muy grande con respecto a la media (media global = 2,91), debido a que la desviación estándar se encuentra en una escala menor a 1.

**Tabla 6**

Nivel de impacto de la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática (n = 150).

| III. Nivel de impacto de la integración de la competencia digital en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática | | Media | Desv. estándar | N |
|---|---|---|---|---|
| 8 | En su institución existe disponibilidad recursos tecnológicos para el desarrollo de su práctica educativa | 2,39 | 0,722 | 150 |
| 9 | Existe disponibilidad de conectividad a Internet que facilite su labor educativa dentro del aula. | 2,71 | 0,994 | 150 |
| 10 | Considera que el desarrollo de la competencia digital mejoraría el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática | 3,59 | 0,991 | 150 |
| 11 | Le gustaría usar recursos tecnológicos como computador, tablets, software de matemáticas, Internet, etc., para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática | 3,29 | 0,945 | 150 |
| 12 | Si en las clases de matemáticas se usaran recursos tecnológicos como computador, dispositivos móviles, software de matemáticas, internet, etc., el proceso de enseñanza-aprendizaje sería más motivador. | 2,67 | 0,953 | 150 |
| 13 | El uso de redes sociales, blogs, wikis, contenidos multimedia (videos YouTube, Prezi, Scribd, Slideshare, …), contribuirían a un aprendizaje significativo de la matemática | 2,88 | 0,996 | 150 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | El uso redes sociales (facebook, twitter, google plus, etc.), blogs o páginas diseñadas por los docentes apoyaría el aprendizaje de matemáticas por fuera del aula de clase. | 2,75 | 0,926 | 150 |
| 15 | Si pudiera usar más tiempo el computador mi aprendizaje de matemáticas sería más fácil. | 3,16 | 0,997 | 150 |
| 16 | El uso de softwares de matemáticas facilita el aprendizaje de matemáticas más que estudiando en libros. | 2,58 | 0,869 | 150 |
| 17 | El uso de computador e Internet me ayuda a aprender fácilmente el conocimiento de la matemática | 3,38 | 0,981 | 150 |
| 18 | El uso del computador puede disminuir mi capacidad de razonamiento matemático. | 2,66 | 0,961 | 150 |
| | **Media global** | **2,91** | | |

*** 1 = Muy poco; 2 = Poco; 3 = Suficiente; 4 = Bastante; 5 = Mucho**

## Discusión y Conclusiones

Los resultados presentados en este trabajo son parte de una investigación más profunda. Estos indican que la mayoría de docentes y estudiantes tienen opiniones negativas acerca del conocimiento y dominio que tiene sobre el desarrollo de la competencia digital puede aportar al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. En ello, incide de manera importante la necesidad de formación sobre la competencia digital como herramienta didáctica que permitan elevar la calidad de la educación, generar mayor comunicación e interacción entre docentes y estudiantes favoreciendo el trabajo cooperativo y el aprendizaje colaborativo. El nivel de formación en el conocimiento y dominio de la competencia digital para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática presenta una posibilidad importante en la redefinición de la práctica pedagógica en la educación. Sin embargo, la competencia digital al igual que las competencias docentes (competencias matemáticas) permiten desarrollar innovaciones pedagógicas de aplicación el proceso de enseñanza-aprendizaje, implican nuevos retos para el docente que tiene bajo su responsabilidad a estudiantes que han desarrollado habilidades y destrezas que van de la mano con la evolución de la tecnología y de Internet.

Por otra parte, la incorporación de la competencia digital al proceso educativo significa adaptación e innovación, puesto que el desarrollo y evolución de la tecnología es pieza clave en la sociedad actual, aunque no es la solución mágica a los problemas educativos pero pueden ayudar a mejorar los mismos si se las utiliza de manera idónea en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es decir, la competencia digital no puede cambiar por sí mismas los procesos de enseñanza-aprendizaje, pero sí pueden aumentar ilimitadamente sus efectos en el proceso educativo. En este sentido, varios investigadores como Molina & Iglesias (2014), Salinas, Benito, & Lizana (2014), Padilla, Moreno y Hernández (2015), Rodríguez (2010), Rodríguez (2015), Sosa (2015), Revelo (2017), entre otros, en sus estudios afirman que la simple incorporación de las TIC no garantiza, en sí mismas, la transformación de las prácticas educativas, sino la manera de cómo el profesorado las utilizan en cada área del conocimiento para que sus estudiantes mejoren su aprendizaje.

Aunque los resultados de la presente investigación no son concluyentes, es claro que la integración las TIC como herramientas para el aprendizaje de la matemática de los estudiantes va más allá del simple uso de estas nuevas herramientas, lo que traerán consigo cambios sustanciales en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el desempeño del docente, en los métodos de enseñanza, etc. En conclusión, es necesario desarrollar una mejor comprensión del conocimiento y dominio de la competencia digital en el ámbito educativo, de modo que las innovaciones en el aprendizaje de la matemática no sean absorbidas por la tecnología, sino que estén orientadas por los procesos pedagógicos que generen aprendizaje significativo entre docentes y estudiantes.

**Referencias bibliográficas:**

Alonso, C., Casablancas, S., Domingo, L., Guitert, M., Moltó, o., Sánchez, J. A. y Sancho, J. M. (2010). De las propuestas de la Administración a las prácticas del aula. *Revista de Educación*, *352*, 53–76.

Area-Moreira, M. (2010). El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC en los centros educativos. Un estudio de casos. *Revista de Educación*, *352*, 77-97. Recuperado de http://inductio.org/fondo_recursos/system/files/el_proceso_de_integracion_tic.pdf

Area-Moreira, M. y Ribeiro-Pessoa, M. T. (2012). From Solid to Liquid: New Literacies to the Cultural Changes of Web 2.0. *Comunicar*, *19*(38), 13-20. https://doi.org/10.3916/C38-2011-02-01

Basurto, E. (2015). Creando certeza en las ideas matemáticas vía el uso de tecnología digital. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (15), 349–360. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23842

Bennett, S., Bishop, A., Dalgarno, B., Waycott, J. y Kennedy, G. (2012). Implementing Web 2.0 technologies in higher education: A collective case study. *Computers & Education*, *59*(2), 524-534. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.12.022

Bennett, S., Maton, K. y Kervin, L. (2008). The "digital natives" debate: A critical review of the evidence. *British Journal of Educational Technology*, *39*(5), 775-786.

Bisquerra, R. (Coord). (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=5826

Buckingham, D. (2009). The future of media literacy in the digital age: some challenges for policy and practices. En *Veniers, P. (Ed.). Euromeduc. Media Literacy in Europe. Controversies, Challenges and Perspectives* (pp. 13-24). Bruxelles: Média Animation.

Cabero, J. (2013). El aprendizaje autorregulado como marco teórico para la aplicación educativa de las comunidades virtuales y los entornos personales de aprendizaje. *Teoría de la Educación; Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *14*(2), 133. Recuperado de http://search.proquest.com/openview/767e5c2ffbd5681fe06308ce77957ace/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2032089

Cabra, F. y Marciales, G. P. (2009). Mitos, realidades y preguntas de investigación sobre los 'nativos digitales': una revisión. *Universitas Psychologica*, *8*(2), 323–338.

Carrera, F. X. y Coiduras, J. L. (2012). Identificación de la competencia digital del profesor universitario: un estudio exploratorio en el ámbito de las Ciencias Sociales. *Identifying the digital competence of university lecturers: an exploratory study in the field of Social Science.*, *10*(2), 273-298. Recuperado de http://0-search.ebscohost.com.lope.unex.es/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=90565438&lang=es&site=eds-live

Castells, M. (2008). Creatividad, innovación y cultura digital. Un mapa de sus interacciones. *Telos. Cuadernos de comunicación e innovación*, *77*. Recuperado de https://telos.fundaciontelefonica.com/telos/articulocuaderno.asp@idarticulo=2&rev=77.htm

Cela, K., Fuentes, W., Alonso, C. y Sánchez, F. (2010). Evaluación de herramientas web 2.0, estilos de aprendizaje y su aplicación en el ámbito educativo. *Journal of Learning Styles*, *3*(5). Recuperado de http://learningstyles.uvu.edu/index.php/jls/article/view/123

Cobo, C. y Pardo, H. (2007). *Planeta Web 2.0. Inteligencia colectiva o medios fast food*. España: Grup de Recerca d'Interaccions Digitals. Recuperado de http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10378388

Colás, P. y Casanova, J. (2010). Variables docentes y de centro que generan buenas prácticas con TIC. *Education in the Knowledge Society (EKS)*, *11*(1), 121–147. Recuperado de http://revistas.usal.es/index.php/revistatesi/article/view/5791

Comisión Europea. (2006). Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de 18 de diciembre de 2006 sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. Diario Oficial de la Unión Europea L 394.

Cózar, R. y Roblizo, M. J. (2014). La competencia digital en la formación de los futuros maestros: percepciones de los alumnos de los Grados de Maestro de la Facultad de Educación de Albacete. *RELATEC*. Recuperado de http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/2940

De La Hoz, L. P., Acevedo, D. y Torres, J. (2015). Uso de redes sociales en el proceso de enseñanza y aprendizaje por los estudiantes y profesores de la Universidad Antonio Nariño, Sede Cartagena. *Formación universitaria*, *8*(4), 77–84.

De La Torre, A. (2006). Web Educativa 2.0. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, *0*(20). Recuperado de http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/515

Del Moral, M. E. y Villalustre, L. (2010). Formación del profesor 2.0: desarrollo de competencias tecnológicas para la escuela 2.0. *MAGISTER: Revista miscelánea de investigación*, *23*, 59–69. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3403432.pdf

Esteve, F. y Gisbert, M. (2012). La competencia digital de los estudiantes universitarios: Definición conceptual y análisis de cinco instrumentos para su evaluación. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Francesc_Esteve/publication/233721481_La_competencia_digital_de_los_estudiantes_universitarios_Definicion_conceptual_y_analisis_de_cinco_instrumentos_para_su_evaluacion/links/0912f50b33d967d777000000.pdf

Ferro, C., Martínez, A. I. y Otero, M. C. (2009). Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza-aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios españoles. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, *0*(29). Recuperado de http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/451

Freire, J. (2007). Los retos y oportunidades de la web 2.0 para las universidades. *La Gran Guía de los Blogs 2008*, 82–90. Recuperado de http://www.udc.gal/dep/bave/jfreire/pdf_blog/Web%202.0%20y%20universidades%20(JuanFreire_GranGuiaBlogs).pdf

González-Pérez, A. y De Pablos, J. (2015). Factores que dificultan la integración de las TIC en las aulas. *Revista de Investigación Educativa*, *33*(2), 401-417. https://doi.org/10.6018/rie.33.2.198161

Kopcha, T. J. (2012). Teachers' perceptions of the barriers to technology integration and practices with technology under situated professional development. *Computers & Education*, *59*(4), 1109–1121. Recuperado de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131512001352

López, C. (2011). Mejores Prácticas en la Enseñanza de las Matemáticas: La integración de las TI Cs. [En línea]. Recuperado de http://

scopeo.usal.es/enfoque-bol-34-mejores-practicas-en-la-ensenanza-de-las-matematicas-la-integracion-de-las-tics/

López, J. C. y Eduteka. (2003). La Integración de las TIC en Matemáticas. Recuperado 20 de septiembre de 2016, de http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/Editorial18

Molina, S. e Iglesias, M. T. (2014). *Una innovación didáctica en la universidad incorporando herramientas tecnológicas en Experiencias de Innovación Docente Universitaria*. España: Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado de http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10903617

Morón, J. L. (2013). Estrategias metodológicas para introducir las TIC y el Internet en matemáticas. Recuperado de http://repositorioacademico.upc.edu.pe/upc/handle/10757/285380

Pachler, N., Cook, J., & Bachmair, B. (2010). Appropriation of Mobile Cultural Resources for Learning: *International Journal of Mobile and Blended Learning*, *2*(1), 1-21. https://doi.org/10.4018/jmbl.2010010101

Padilla, S., Moreno, C. I. y Hernández, R. (2015). Barreras para la integración de buenas prácticas con TIC. Estudio de caso. *Innoeduca. International Journal of Technology and Educational Innovation*, *1*(2), 80–90. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5363138.pdf

Revelo, J. E. (2017). *Modelo de integración de la competencia digital docente en la enseñanza de la matemática en la universidad tecnologica equinoccial* (Doctoral dissertation). Universidad de Extremadura. Recuperado de http://dehesa.unex.es/bitstream/handle/10662/6214/TDUEX_2017_Revelo_Rosero.pdf?sequence=1

Revelo, J. E., Revuelta, F. I. y González-Pérez, A. (2018). Modelo de integración de la competencia digital del docente universitario para su desarrollo profesional en la enseñanza de la matemática – Universidad Tecnológica Equinoccial de Ecuador. *EDMETIC*, *7*(1), 196-224. https://doi.org/10.21071/edmetic.v7i1.6910

Revuelta, F. I. (2011). Competencia digital: desarrollo de aprendizajes con mundos virtuales en la escuela 2.0. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (37). Recuperado de http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/view/397

Revuelta, F. I. y Pérez, L. (2009). *Interactividad en los entornos de formación on-line*. España: Editorial UOC. Recuperado de http://site.ebrary.com/lib/alltitles/docDetail.action?docID=10646727

Rodríguez, R. M. (2010). El impacto de las TIC en la transformación de la enseñanza universitaria: repensar los modelos de enseñanza y aprendizaje. *Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *11*(1).

Rodríguez, I. (2015). La incorporación de la web 2.0 en la práctica educativa. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo ISSN: 2007-2619*, (11). Recuperado de http://ride.org.mx/1-11/index.php/RIDESECUNDARIO/article/download/691/676

Romero, L. M. (2008). Gestión de Conocimientos Universitarios y web 2.0 en el núcleo de la prospectiva de la educación a distancia. Memorias II Congreso CREAD ANDES y II Encuentro Virtual Educa Ecuador. Recuperado de http://reposital.cuaed.unam.mx:8080/jspui/handle/123456789/2785

Salinas, J., Benito, B. De, y Lizana, A. (2014). Competencias docentes para los nuevos escenarios de aprendizaje. Recuperado 23 de noviembre de 2015, de http://148.215.2.11/articulo.oa?id=27431190010

Santamaría, F. (2005). Herramientas colaborativas para la enseñanza usando tecnologías web: weblogs, redes sociales, wikis, web 2.0. Recuperado de http://cursa.ihmc.us/rid=1196863010187_1551044424_8326/Herramientas_Web_2-0.pdf

SCOPEO. (2012). *e-MatemáTICas*. Salamanca: Scopeo Monográfico No. 4. Recuperado de http://scopeo.usal.es/wp-content/uploads/2013/04/scopeom004.pdf

Silva, J., Miranda, P., Gisbert, M., Morales, J. y Onetto, A. (2016). Indicadores para evaluar la competencia digital docente en la formación inicial en el contexto Chileno – Uruguayo / Indicators to Assess Digital Competence of Teachers in Initial Training in the Chile - Uruguay Contex. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa - RELATEC*, *15*(3), 55-67. https://doi.org/10.17398/1695-288X.15.3.55

Sosa, M. J. (2015). *El proceso de integración de las tecnologías de la información y comunicación en centros de Educación Primaria: Estudio de caso múltiple* (Tesis Doctorado). Departamento de Ciencias de la Educación. Universidad de Extremadura, Cáceres. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=45464

Wodzicki, K., Schwämmlein, E. y Moskaliuk, J. (2012). "Actually, I Wanted to Learn": Study-related knowledge exchange on social networking sites. *Social Media in Higher Education*, *15*(1), 9-14. https://doi.org/10.1016/j.iheduc.2011.05.008

Wong, E. M., Li, S. S., Choi, T. y Lee, T. (2008). Insights into Innovative Classroom Practices with ICT: Identifying the Impetus for Change. *Educational Technology & Society*, *11*(1), 248–265. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/jeductechsoci.11.1.248

Yang, H. (2012). ICT in English schools: transforming education? 1. *Technology, pedagogy and education*, *21*(1), 101–118. Recuperado de http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/1475939X.2012.659886

Zuluaga, J. M., Pérez, F. E. y Gómez, J. D. (2012). Uso de la web 2.0 para la construcción de blogs, páginas web y animaciones. Recuperado de http://files.artematic3.webnode.es/200000013-4c4974d42b/Artematic-Taller%20-1%20uso%20de%20la%20web%202.0%20U%20de%20M%202014.pdf

# Los mapas conceptuales como estratégica didáctica para el aprendizaje de la física

**Freddy Guachún**
**Sonia Guzñay**
Universidad de Cuenca

## Resumen

El presente trabajo muestra una propuesta didáctica para el aprendizaje de la física a través de mapas conceptuales como estratégica didáctica, con la que se pretende dar apoyo a los docentes de los diferentes niveles educativos, quienes cumplen con la ardua labor de la enseñanza de esta ciencia, buscando generar en los estudiantes aprendizajes activos y significativos. Este proyecto se fundamenta en los estudios de los precursores de estas técnicas metacognitivas y de la teoría del aprendizaje significativo de Novak, Ausubel y Gowin.

**Palabras clave:** Mapas conceptuales, enseñanza, estratégia didáctica, física, significativo, activo.

## Introducción

Actualmente la enseñanza de la física, en los diferentes niveles educativos del país, es un reto para los docentes, debido a varios factores, como la falta de relación entre las diferentes ciencias, el desinterés de los estudiantes, el uso excesivo de las redes sociales, a los que se suma la complejidad de la asignatura; estas causas conllevan a que no se produzcan aprendizajes significativos, los mismos que se reflejan en los resultados de las diferentes evaluaciones. Al no tener una comprensión profunda de los contenidos abordados, los estudiantes se sienten frustrados y desmotivados de manera total o parcial con respecto al aprendizaje de esta ciencia. Situación que se agudiza mucho más, debido a que a veces se produce una desconexión enorme entre lo que el docente enseña y lo que el estudiante realmente aprende (Elizondo, 2013), especificamente porque no se utilizó una estrategia didáctica adecuada.

Lo expuesto anteriormente incide para que la formación de los estudiantes sea deficiente, por lo que los docentes deben buscar nuevas alternativas metodológicas que ayuden a los alumnos a construir el conocimiento y así lograr aprendizajes activos y significativos, estrategias que no solo servirán para ese momento sino para toda su vida.

Los organizadores gráficos en general, y los mapas conceptuales en particular, constituyen una importante herramienta para ayudar a representar de forma gráfica el conocimiento que se está adquiriendo y a almacenar ideas e información, ya que tienen por objeto representar relaciones significativas (Acosta y García, 2012). Además, son un recurso que no requiere de equipamiento especial, ni instalaciones específicas, sino únicamente de lápiz y papel, materiales con los que cuentan todos los estudiantes que asisten a las diferentes instituciones educativas.

Esta técnica funciona como un resumen esquemático, puesto que permite organizar, agrupar y relacionar conceptos, desde los más generales y pertinentes, hasta los más sencillos y complejos; facilitando una mejor comprensión de los contenidos estudiados. Como estrategia, promueve el desarrollo del proceso de aprender a aprender representando los significados de conceptos científicos (Acosta y Acosta, 2010).

Los mapas conceptuales son técnicas metacognitivas que están fundamentadas en la teoría de diversos autores como Ausubel, Novak, Hanesian y Gowin, quienes plantean que esta estrategia es muy eficaz, pues sirve para generar aprendizajes significativos cuando los nuevos conceptos se enlazan con otros más generales o más inclusivos, facilitando el aprendizaje de la estructura conceptual y cognitiva de los estudiantes.

La posibilidad de lograr aprendizajes significativos, mejorando el pensamiento reflexivo y la creatividad a través de los mapas conceptuales es una estrategia que está siendo motivo de investigación en el campo educativo, por ejemplo el trabajo desarrollado por Cobas, Repilado y Gracia (2017) titulado "Los mapas conceptuales en la enseñanza de la física: una alternativa para desarrollar el aprendizaje en los estudiantes de ingeniería geológica", describen los múltiples beneficios cognitivos que se obtuvieron cuando se utilizaron mapas conceptuales dentro de la enseñanza de la física, lo cual corrobora lo manifestado en los párrafos anteriores.

"Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Una proposición consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica" (Novak y Gowin, p. 33). En la elaboración de estos organizadores se utilizan representaciones gráficas ordenadas jerárquicamente, de modo que se visualice la ordenación conceptual de un tema específico.

La representación de datos en un mapa conceptual puede ser tan sencilla que podría formarse por tan solo dos conceptos enlazados con una palabra de manera que se forma una proposición; así por ejemplo, en la figura 1, las palabras "la física" y "el mundo" son los conceptos y la palabra "estudia" es la de enlace; entonces podemos ver que la proposición sería: "La física estudia el mundo".


*Figura 1 Mapa conceptual simple*

Cuando el tema a estudiar involucra un número mayor de contenidos, se debe iniciar jerarquizando los diferentes conceptos, para lo cual es necesario analizar y seleccionar la información más importante y relevante del tema, luego, ordenarla por áreas y niveles de generalidad (de los más generales a los específicos); esto ayudará a que se vayan abriendo las posibilidades de organización de conceptos, jerarquías y entrelazando ideas, tal como se muestra en la figura 2, el concepto "valor numérico" está entrelazado con los conceptos "escalares" y "vectoriales".

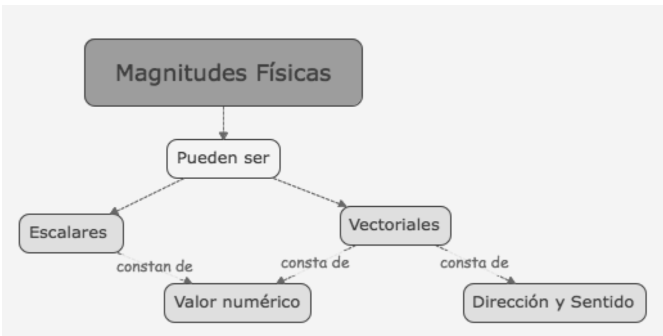



*Figura 2 Mapa conceptual de tres jerarquías*

De igual manera se puede ir armando mapas conceptuales de muchos temas y varias jerarquías, de modo que enlacen conceptos o significados importantes, para lo cual los estudiantes necesitan haber comprendido el tema profundamente. En la figura 3, se muestra un mapa conceptual del tema de Mecánica de Fluidos, en el que se observa la división de esta temática y el objeto de estudio de cada una de ellas; también se pueden vislumbrar cómo los conceptos matemáticos se entrelazan entre ellos.

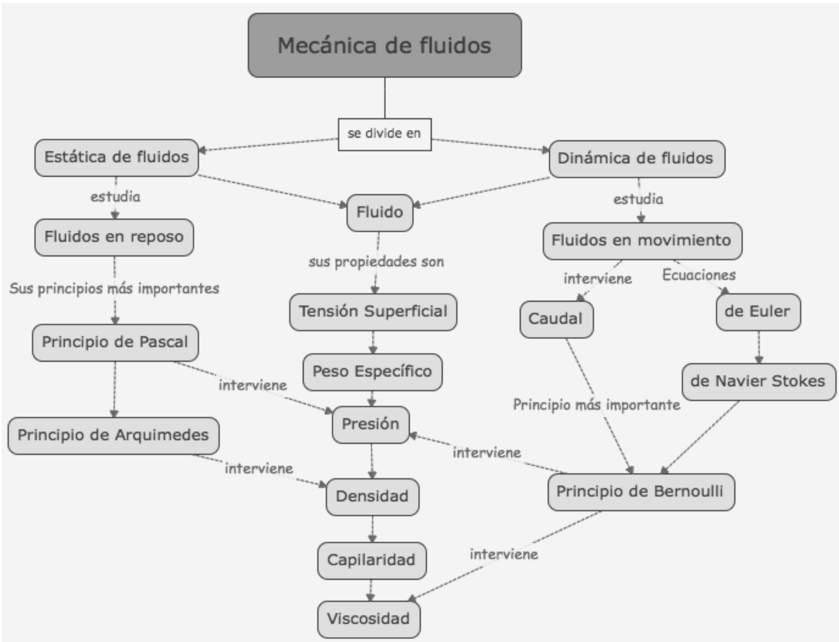



*Figura 3 Mapa conceptual de varias jerarquías*

## Pasos para construir un mapa conceptual

Gowin y Novak (2002) manifiestan que no existe un único camino para la inclusión de mapas conceptuales en el salón de clases, pero que puede usarse el siguiente procedimiento, el mismo que ha dado buenos resultados.

Antes de comenzar con la elaboración de los mapas conceptuales, se sugiere las siguientes actividades introductorias:

— Presente una lista de nombres de objetos que sean conocidos por los estudiantes; por ejemplo: vector, fuerza, velocidad, aceleración, etc., luego proporcione otra lista de nombres de acontecimientos, por ejemplo, pensar, analizar, enseñar, aprender; consulte a los estudiantes si pueden diferenciar entre las dos listas. Se puede ayudar indicándoles que la primera lista es de objetos y la segunda, de sucesos o acontecimientos.

— Pida a los estudiantes que describan en un papel o verbalmente lo que viene a su mente cuando escuchen las palabras vector, velocidad, aceleración, etc. Estas descripciones son las imágenes mentales que los estudiantes tienen sobre estas palabras, a las cuales llamaremos conceptos. Ahora bien, es importante indicar que existen conceptos que pueden hacer referencia a cosas concretos como auto, agua, casa; otros que se refieren a adjetivos, es decir, los que describen las características o cualidades de los objetos o sucesos y finalmente los pronombres que hacen las veces de los sustantivos.

— Solicite a los estudiantes que describan, en un papel o verbalmente, lo que viene a su mente cuando escuchan los conectivos es, donde, el, son, la. Es muy probable que no puedan describirlas; entonces indique que estas palabras no son conceptos sino palabras o frases de enlace, que al unirse con los conceptos forman frases u oraciones coherentes. Cabe recalcar que dentro de las palabras de enlacen están los verbos, preposiciones, conjunciones y los adverbios.

— Realice algunos ejemplos, escribiendo en la pizarra palabras de enlace y conceptos de temas sencillos y conocidos por los estudiantes; a continuación, forme proposiciones con ellas.

Luego de que haya sido comprendida la diferencia entre los elementos que se utilizan para construir los mapas conceptuales, se puede iniciar con el trabajo, para lo cual se recomienda:

1) Leer el texto utilizando estrategias cognitivas y metacognitivas de comprensión lectora.
2) Identificar los conceptos claves del texto, es decir, aquellos que recogen las ideas principales.
3) Ordenar jerárquicamente los conceptos del más general al más particular: el más general en la parte superior del mapa y, debajo, los menos generales. Dichos conceptos deberán escribirse dentro de una figura geométrica.
4) Unir los conceptos mediante líneas y palabras de enlace, con las que se refleje el tipo de relación que es establece entre ellos en el texto.
5) Finalmente verificar que las palabras concepto y enlace formen proposiciones lógicamente correctas.

**Conclusiones**

Esta estrategia didáctica servirá a los docentes para que puedan fomentar un aprendizaje significativo y cognitivo de los estudiantes, ya que a través de ella se pueden relacionar conceptos con otros más generales o más específicos. Incluso pueden hacerse relaciones entre conceptos, convirtiéndose en una forma activa de trabajo, pues son los estudiantes quienes, mediante el análisis, obtienen las palabras claves o conceptos, las de enlace e irlas relacionando de manera simple y vistosa, lo que les permitirá consolidar sus conocimientos.

Diversos estudios muestran que los mapas conceptuales en la actualidad se han convertido en una herramienta útil para el aprendizaje de cualquier ciencia, por lo que la física no podría ser la excepción, debido a que al trabajar con esta técnica los estudiantes mejoran su pensamiento reflexivo, mejorando así su capacidad de razonamiento, lo cual será beneficioso para toda su vida.

Si bien los mapas conceptuales son una técnica de estudio que ayudan a retener información relevante a los estudiantes, no son de uso exclusivo de ellos, pues los docentes también pueden utilizarlos para elaborar esquemas generales de los contenidos a desarrollar, o como una técnica de evaluación con el fin de verificar la comprensión del tema.

**Referencias bibliográficas:**

Acosta, S. y Acosta, R. (2010). Los mapas conceptuales y su efecto en el aprendizaje de conocimiento biológico. *Omnia,* 16 (2), 209-225. Recuperado desde: https://www.redalyc.org/pdf/737/73715084012.pdf

Acosta, S. y García, M. (2012). Estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de biología en las universidades públicas. *Omnia,* 18 (2), 67-82. Recuperado desde: https://www.redalyc.org/pdf/737/73723402005.pdf

Ausubel, D., Novak, J & Hanesian, H (1983). *Psicología Educativa*.

Cobas, R., Repilado, F. y Gracias, A. (2017). Los mapas conceptuales en la enseñanza de la física: una alternativa para desarrollar el aprendizaje en los estudiantes de ingeniería geológica. *Revista Didáctica y Educación*. 8 (6) 185-194.

Elizondo, M. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la física*. Revista Presencia Universitaria.*

Gowin, B. & Novak, J. (2002). *Aprendiendo a aprender*. España: Martínez Roca.

Gangoso, Z. (1997). *El fracaso en los cursos de física. El mapa conceptual, una alternativa para el análisis*, 17-36.

Moreno, N., Angulo, R., Reducindo, I. y Aguilar, R. (2018). Enseñanza de la física mediante fislets que incorporan mapas conceptuales híbridos. *Revista Apertura*, 20-35.

# Aprendizaje significativo en las matemáticas a través del origami

**Jonathan Alexander Ortiz Guarnizo**
Universidad de Cuenca

## Resumen

En esta ponencia se pretende demostrar a los docentes la manera de llevar a cabo una enseñanza de la geometría de una manera llamativa y perceptiva, quebrantando el tradicionalismo educativo y consolidando el conocimiento de los estudiantes; por medio del uso de la técnica de plegado de papel (origami) como una estrategia didáctica y herramienta moldeable para el aprendizaje en la geometría.

El enfoque investigativo es de tipo descriptivo, consolidando el uso del origami como estrategia didáctica, demostrando que puede adaptarse a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos dentro del ámbito educativo. La investigación se basó en un diseño de dos estratos independientes, aplicando pruebas de normalidad y comparación de medidas de dispersión, identificando que el segundo grupo obtuvo una mayor comprensión del tema luego de haber puesto en práctica el origami. Se concluyó que el origami como una herramienta educativa trae beneficios debido a que el docente puede utilizar este medio socializando la actividad realizada en la pizarra con un objeto didáctico movible y manipulable dentro del aula beneficiando el aprendizaje del grupo estudiantil.

**Palabras clave:** Construcción de sólidos, enseñanza de la geometría, origami

## Introducción

El propósito de esta ponencia consiste en brindar a los participantes una alternativa de cómo se puede acoplar y adaptar un elemento cultural japonés como recurso didáctico creando vínculos en la construcción de figuras geométricas planas y del espacio; dando una oportunidad a los docentes para enseñar geometría con un recurso económico y de facilidad de adquisición. En el caso del estudiante, entender, comprender y analizar los contenidos con elementos demostrativos.

Se pretende demostrar al docente e incentivar dentro de la mediación pedagógica, de tal manera que se facilite la labor de aprendizaje consolidándose de manera óptima, siempre y cuando se tome en cuenta a la diversidad de estudiantes; creando destrezas que motiven a los estudiantes a aprender, crear, investigar y desarrollar una buena aceptación de las matemáticas. El estudio de la geometría en los niveles de educación básica media y superior se ha delimitado a la construcción de pocas figuras y cuerpos, habitualmente a los que se pueden trabajar comúnmente con regla y compás; por el contrario, al vincular el origami se les permite a los estudiantes construir, manipular y analizar los objetos consolidando conceptos a mediano y largo plazo.

El objetivo principal de esta ponencia es aplicar el origami como una herramienta de enseñanza y aprendizaje de la geometría, y demostrar la relación que se puede presentar con otras áreas de la matemática. De manera que se pueda brindar a los participantes técnicas y actividades que influyan en la clase creando un dinamismo, motivación y la creatividad para conllevar el aprendizaje; sin olvidar los beneficios que el origami trae a los estudiantes en las habilidades motrices y cognitivas.

## Materiales y métodos

**Enfoque de la investigación:** La siguiente investigación tiene un enfoque de intervención de investigación acción, siendo cuantitativo por la recolección de datos e información aplicada a dos estratos, medición numérica y respectivo análisis estadístico.

**Alcance:** Se estableció trabajar con una población de 80 estudiantes divididos en dos grupos de 40 estudiantes cada uno, pertenecientes a octavo año de educación básica de la institución Educativa "Técnico Salesiano" ubicado en la ciudad de Cuenca. La importancia de este estudio se fundamentó en relacionar el origami como material o herramienta didáctica con respecto a la geometría.

**Población de estudio:** Se delimitó a dos grupos de 40 estudiantes de octavo año de educación, bajo la dirección de los docentes: Lic. Diana López y Lic. Marco Quito.

**Diseño de investigación:** El diseño de investigación a aplicarse es de campo, la cual consiste en la recolección de datos directamente de la realidad donde ocurren los hechos, sin manipular o controlar alguna variable.

**Contextualización:** Origami, la definición de origami está compuesta de dos palabras japonesas "oru", plegado y "kami" papel. De origen chino y trasladado a la cultura japonesa, fue utilizado como herramienta de entrenamiento en la sociedad marcial japonesa durante el periodo Muromachi y posterior mente se le dio un uso ornamental denominado Orikata o "ejercicios de doblado" (Guerrero, 2009). El origami más que un arte japonés se ha definido como un arte educativo en el cual las personas desarrollan su expresión artística e intelectual; el carácter matemático que puede llegar a representar el papel no siempre está relacionado con el lado artístico; al contrario, se lo puede reflejar en la construcción de conocimientos (Vásquez, 2006).

La estrecha relación entre este elemento de la cultura japonesa y una ciencia experimental es el llevar acabo los objetos de estudio abstractos a objetos manipulables y moldeables. De las modalidades de plegado de papel tales como:

- Secuencial
- Modular
- Axiomas de constructibilidad (C.P.)

Se puede vincularlos con las diversas áreas de estudio de la matemática. Un claro ejemplo de esto es la geometría plana y del espacio; en la cual su objeto principal es el estudio de figuras planas, sus elementos, principios y demostraciones y es aquí donde la papiroflexia secuencial verifica que las demostraciones sean ciertas. La papiroflexia modular nos permite desarrollar la representación física de entes abstractos, como el dibujo de poliedros que generalmente se presenta en la pizarra, modelos computarizados o figuras recortables. Por el contrario, la papiroflexia nos permite visualizar la figura desde diversos puntos de vista incluso como se conforma el interior de esta.

Otro de los beneficios que nos presenta también el origami modular es el poder trabajar son teorías de grafos; como explica su definición exacta: un grafo es un complejo infinito de vértices y aristas. Un grafo es plano si se puede dibujar en $R^2$ de modo que las aristas no se corten; es aquí donde e la papiroflexia modular nuevamente nos permite desarrollar y analizar ejemplos de grafos en $R^3$. Dentro de la geometría euclidiana se puede demostrar que mediante el uso de axiomas de constructibilidad podemos demostrar teoremas establecidos como: proporciones de Thales. Simetría de triángulos, intersección de ángulos, etc.

**Materiales:**

- 5 hojas de papel bond reciclado.
- 5 hojas de papel iris A4.
- Regla
- Lápiz
- Tijeras
- Marcadores de pizarra
- Pizarra
- Proyector
- Laptop
- Borrador de pizarra

**Instrumento:** Prueba de conceptos.

**Método:** Las actividades se desarrollaron en tres etapas durante un periodo máximo de 6 horas clase: la primera se desarrolló mediante la selección del tema dentro del currículo con la finalidad de cumplir el objetivo general del proyecto, bajo la aprobación y revisión de los docentes tutores. Dentro de la segunda, se elaboró test conceptuales, recursos didácticos, recursos aplicables, y se aplicó el primer test conceptual para analizar el nivel de conocimiento de los estudiantes previo a aplicar la investigación. Para la etapa final, se trabajó en modalidad de talleres el material didáctico elaborado, consolidando el conocimiento previo de los estudiantes y resolviendo dudas e incertidumbres que se presentaron con relación a los temas; donde se dio paso a la segunda prueba conceptual con la finalidad de analizar el nivel.

**Criterios de inclusión:** Estudiantes pertenecientes al octavo año de educación básica con un rango de edad entre los 11- 14 años, sin importar que los estudiantes posean TDAH.

**Criterios de exclusión:** No aplicaron en ningún caso.

**Proceder estadístico:**

**TABLA 1:** *Análisis de datos en base a conocimientos previos en el estrato 1.*

| Intervalos | frecuencia | frecuencia acumulada | frecuencia relativa | M.C. | (f*M.C.) | f *(M.C)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **2,50 a 3,55** | 1 | 1 | 2,63 | 3,02 | 3,02 | 3,02 |
| **3,56 a 4,61** | 11 | 12 | 28,95 | 4,08 | 44,88 | 493,68 |
| **4,62 a 5,67** | 5 | 17 | 13,16 | 5,14 | 25,7 | 128,5 |
| **5,68 a 6,73** | 5 | 22 | 13,16 | 6,20 | 31 | 155 |
| **6,74 a 7,79** | 8 | 30 | 21,05 | 7,27 | 58,16 | 465,28 |
| **7,80 a 8,85** | 8 | 38 | 21,05 | 8,33 | 66,64 | 533,12 |
| **Sumatoria** | **38** | | **100** | | **229,4** | **1778,6** |

***Media**: 6,04; **Mediana**: 7,13; **Moda:** 4,22; **Desviación estándar:**6.84*

**TABLA 2:** *Análisis de datos en base a conocimientos previos en el estrato 2.*

| Intervalos | frecuencia | frecuencia acumulada | frecuencia relativa | M.C. | (f*M.C.) | f*(M.C)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,9 a 3,15** | 3 | 3 | 7,5 | 2,53 | 7,59 | 22,77 |
| **3,16 a 4,41** | 3 | 6 | 7,5 | 3,79 | 11,37 | 34,11 |
| **4,42 a 5,67** | 8 | 14 | 20 | 5,05 | 40,4 | 323,2 |
| **5,68 a 6,93** | 13 | 27 | 32,5 | 6,31 | 82,03 | 1066,39 |
| **6,94 a 8,19** | 11 | 38 | 27,5 | 7,57 | 83,27 | 915,97 |
| **8,20 a 9,45** | 2 | 40 | 5 | 8,83 | 17,66 | 35,32 |
| **Sumatoria** | **40** | | **100** | | **242,32** | **2397,76** |

**Nota:** las tablas 1 y 2 hacen referencia a la obtención de datos antes de desarrollarse las actividades planteadas en esta investigación.

***Media****: 6.06;* ***Mediana****: 7,18;* ***Moda:*** *6.57;* ***Desviación estándar:****7.74*

**TABLA 3:** *Análisis de datos póstumos al taller en el estrato 1.*

| Intervalos | frecuencia | frecuencia acumulada | frecuencia relativa | M.C. | (f*M.C.) | f*(M.C)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,00 a 5,83** | 1 | 1 | 2,63 | 5,42 | 5,415 | 5,415 |
| **5,84 a 6,67** | 6 | 7 | 15,79 | 6,26 | 37,53 | 225,18 |
| **6,68 a 7,51** | 9 | 16 | 23,68 | 7,10 | 63,85 | 574,69 |
| **7,52 a 8,35** | 14 | 30 | 36,84 | 7,94 | 111,09 | 1555,26 |
| **8,36 a 9,19** | 5 | 35 | 13,16 | 8,78 | 43,87 | 219,37 |
| **9,2 a 10,03** | 3 | 38 | 7,89 | 9,62 | 28,85 | 86,53 |
| **Sumatoria** | **38** | | **100** | | **290,61** | **2666,46** |

***Media****:7,65;* ***Mediana****: 7,69;* ***Moda:*** *7,82;* ***Desviación estándar:****8.38*

**TABLA 4:** *Análisis de datos póstumos al taller en el estrato 2.*

| Intervalos | frecuencia | frecuencia acumulada | frecuencia relativa | M.C. | (f*M.C.) | f*(M.C)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4 a 5** | 6 | 6 | 15 | 4,50 | 27 | 162 |
| **5,1 a 6,1** | 2 | 8 | 5 | 5,60 | 11,2 | 22,4 |
| **6,2 a 7,2** | 2 | 10 | 5 | 6,70 | 13,4 | 26,8 |
| **7,3 a 8,3** | 2 | 12 | 5 | 7,80 | 15,6 | 31,2 |
| **8,4 a 9,4** | 24 | 36 | 60 | 8,90 | 213,6 | 5126,4 |
| **9,5 a 10,5** | 4 | 40 | 10 | 10 | 40 | 160 |
| **Sumatoria** | **40** | | **100** | | **320,8** | **5528,8** |

***Media**:8,02; **Mediana**: 7,73; **Moda:** 8,93; **Desviación estándar:**11, 76.*

**Resultados:** Luego de aplicar por segunda vez la prueba conceptual se evidenció una mejora en los resultados obtenidos, es decir que el origami es una herramienta que puede utilizarse para facilitar el aprendizaje de la geometría.

**Discusión:** Dentro de la aplicación del proyecto, se evidenciaron las bondades del origami en el trabajo de geometría plana dentro del aula clase, los estudiantes se mostraron interesados en las actividades, debido a que se les presentó un enfoque diferente al tradicional, donde el origami relució como herramienta de fácil acceso y manejo sin olvidar que entre algunos estudiantes se necesitó una mayor atención para corregir los dobleces y ensambles.

Durante la aplicación de la investigación se pudo tener en cuenta que el origami se adaptó muy bien con los estudiantes, el cual permitió aclarar dudas en temas ya explicados, y vinculándose con temas a tratarse. Uno de los principales beneficios que se encontró es que luego de haber trabajado, los docentes indicaron que dentro de los estratos se ubicaron estudiantes con TDAH y trabajaron de forma colaborativa y disciplinaria igual o mejor al resto de los estudiantes. La desventaja dentro del proyecto se presentó por la falta de conocimiento de origami por parte de la mayoría de los estudiantes.

**Conclusiones:**

— En la primera aplicación del test se obtuvo una media general de 6.05 con lo cual se evidenciaba que los estudiantes carecían de un buen nivel de conocimientos, luego de aplicar el segundo test se obtuvo una media general de 7.84; mosteando una mejora considerable del 17.9% durante el corto periodo de investigación.

— Se presenta una iniciativa e inquietud por aprender geometría a través del plegado de figuras.

— Se ha podido evidenciar en algunos de los jóvenes un avance en el aprendizaje sobre conceptos geométricos y del origami.

— Se ha logrado afianzar algunos valores como el compañerismo, el respeto, la tolerancia y amistad, compartiendo con sus compañeros materiales o ayudando durante el plegado de figuras.
Se comprobó que el origami es un recurso didáctico viable cumpliendo con los temas respectivos al currículo de educación en el Ecuador.

**Referencias bibliográficas:**

Prieto, J. R. (2015). Matemáticas y papiroflexia.. País Vasco: Euskal Herriko

Jaramillo, G. (2004). Descubriendo el mundo de las matemáticas a través del origami . Bogotá: CASD.

Vásquez, H. D. (2006). El origami cómo recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. *Encuentro colombiano de matemática educativa*. Bogotá: UNIANDES.

Guerrero, P. (2009). Cuenca de papel, modelando el caracter diciplinario a base de origami. Cuenca: s/e.

ISBN: 978-9978-14-446-6