Forma Cuasi-Normal Generalizada para Sistemas No Autónomos de EDO

Las Formas Normales tienen sus orígenes en los métodos cualitativos desarrollados para el estudio de los sistemas de E.D.O. por Poincaré, Lyapunov y las contribuciones de Dulac, Siegel, Kolmogorov Birkhoff, Sternberg, Chen, Bruno, Bibikov, entre otros. En las mismas no se pretende hallar una fórmula explícita que exprese la solución de los sistemas de E.D.O., sino más bien encontrar propiedades generales que describan el comportamiento de las soluciones. Uno de los métodos usados para alcanzar la anterior meta, es la reducción del sistema que se investiga a formas más simples (Formas Normales) y, del resultado de esto, obtener las propiedades de la solución del sistema inicial. La obra aquí presentada amplía las contribuciones de los anteriores investigadores al estudio de los sistemas no autónomos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Doctor en Matemática, Maestría en Física Matemática. Matemático. Formado URSS. Académico con 30 años en la Academia Universitaria en Cuba, así como en países extranjeros (Brasil, Venezuela, Colombia, Angola, Ecuador). Publicaciones de artículos y libros. Actualmente profesor, UMET,Quito, Ecuador.

978-3-8416-8481-3

Antonio Manuel Otero Diéguez · José Enrique Martínez Sera · Antonio Iván Ruiz Chaveco

Forma Cuasi-Normal Generalizada para Sistemas No Autónomos de EDO

Formas normales para los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PUBLICIA

Antonio Manuel Otero Diéguez
José Enrique Martínez Sera
Antonio Iván Ruiz Chaveco

Forma Cuasi-Normal Generalizada para Sistemas No Autónomos de EDO

Antonio Manuel Otero Diéguez
José Enrique Martínez Sera
Antonio Iván Ruiz Chaveco

Forma Cuasi-Normal Generalizada para Sistemas No Autónomos de EDO

Formas normales para los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PUBLICIA

Impressum / Aviso legal
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Todos los nombres de marcas y nombres de productos mencionados en este libro están sujetos a la protección de marca comercial, marca registrada o patentes y son marcas comerciales o marcas comerciales registradas de sus respectivos propietarios. La reproducción en esta obra de nombres de marcas, nombres de productos, nombres comunes, nombres comerciales, descripciones de productos, etc., incluso sin una indicación particular, de ninguna manera debe interpretarse como que estos nombres pueden ser considerados sin limitaciones en materia de marcas y legislación de protección de marcas y, por lo tanto, ser utilizados por cualquier persona.

Coverbild / Imagen de portada: www.ingimage.com

Verlag / Editorial:
PUBLICIA
ist ein Imprint der / es una marca de
IBMS Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
17 Meldrum Street, Beau Bassin 71504, Mauritius
Email / Correo Electrónico: info@omniscriptum.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Publicado en: consulte la última página
ISBN: 978-3-8416-8481-3

Zugl. / Aprobado por: Santiago de Cuba, Universidad de Oriente, Tesis Doctor en Ciencias Matemáticas

Copyright / Propiedad literaria &cop Antonio Manuel Otero Diéguez, José Enrique Martínez Sera, Antonio Iván Ruiz Chaveco
Copyright / Propiedad literaria © 2017 IBMS Ltd., member of OmniScriptum Publishing Group
Alle Rechte vorbehalten. / Todos los derechos reservados. Beau-Bassin 2017

Contenido

INTRODUCCIÓN

La imposibilidad en general de resolver por cuadratura los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias ha propiciado el estudio de la naturaleza cualitativa de tales sistemas, dando lugar a la ***Teoría Cualitativa de las ecuaciones Diferenciales Ordinarias***. En la misma no se pretende hallar una fórmula explícita para la solución, sino más bien encontrar propiedades generales que describan su comportamiento. Uno de los métodos usados para alcanzar la anterior meta es la reducción del sistema que se investiga a formas más simples y de esta última inferir propiedades del sistema inicial, entre las formas más simples se encuentran las ***Formas Normales.*** A tales formas se llega reduciendo el sistema inicial mediante una transformación de coordenadas invariante respecto al punto de reposo.

Durante algo más de cien años mucho se ha hecho (y se ha logrado) en aras de resolver los problemas que aparecen al estudiar los sistemas autónomos por medio de las formas normales, sin embargo, para los sistemas no autónomos la situación es menos alentadora por las complejidades que surgen, como son: dificultad al tratar de calcular los coeficientes de las series de las transformaciones, lo engorroso de los métodos para demostrar la analiticidad de las transformaciones, entre otras.

Nuestro trabajo está dedicado al estudio de los sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideremos el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales:

$$\dot{x}_j = f_j(x,t), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

donde las funciones $f_j(x,t)$, j=1,...,n, son series de potencias en las variables $x_1, x_2,..., x_n$, con coeficientes continuos y ω-periódicos en t, sin términos independientes.

La necesidad de conocer hasta qué punto la forma normal describe las propiedades del comportamiento de las soluciones del sistema (1) ha conllevado a los investigadores a estudiar los siguientes problemas:

A.-) Descripción de la forma normal

$$\dot{y}_j = g_j(y,t), \quad j=1,\ldots,n, \tag{2}$$

a la cual pueda ser reducido el sistema (1) por medio de alguna transformación formal

$$x_j = \varphi_j(y,t), \quad \varphi_j(0)=0, \quad j=1,\cdots,n. \tag{3}$$

B.-) Búsqueda de la forma normal (2) tal que la analiticidad de (1) implique la analiticidad de (2).

C.-) Hallar la forma normal (2) que se obtiene de un sistema analítico (1) mediante transformaciones divergentes (3).

La solución a los problemas planteados permite descubrir el comportamiento de las soluciones del sistema (1) a partir del estudio de las soluciones del sistema (2).

Entre las formas normales a la que puede ser reducido el sistema (1) tenemos: Forma Normal *(FN)*, Forma Normal sobre Superficie Invariante *(FNSI)*, Forma Cuasi-Normal Generalizada *(FCNG)*[1], entre otras.

Los principales logros en el estudio de los problemas A), B), C), en el caso de sistemas no autónomos, se pueden resumir de la forma siguiente:

Bruno en (1971) [Br 3, Sección 11.I] redujo el sistema (1) a un sistema

---

[1] ***La definición correspondiente a cada forma normal será dada en el epígrafe I.2 del capítulo I.***

autónomo de orden *n+1* y para este determinó su Forma Normal (FN). Este resultado generaliza un caso particular estudiado por Sibuya Ya., en 1958 [Si 1].

En 1986 aparecen publicados los resultados de Basov, Ruiz y Pérez [Ba,Ru,Pe 3] sobre el estudio del sistema no autónomo de la forma:

$$\dot{x} = Ax + X(x,t), \tag{4}$$

donde A es una matriz de coeficientes reales nxn, $A \in \mathbf{R}^{nxn}$, x es un vector columna n-dimensional definido en los complejos $x = col\ (x_1,..., x_n)$,

$x \in \mathbf{C}^n$, $X = col\ (X_1,..., X_n)$, es un vector columna cuyos componentes representan series de potencias convergentes que satisfacen las propiedades impuestas a $f_j(x,t)$, j=1,...,n.

Ellos demostraron que, cuando los valores propios de la matriz A del sistema (4) satisfacen una condición de ausencia de pequeños divisores (condición de ε)[2], tiene lugar la equivalencia formal y la equivalencia analítica (EF y EA)[3] entre el sistema (4) y la forma normal lineal. La demostración de la convergencia de la transformación normalizante fue realizada por el método generalizado de Newton, método que es aplicado en el epígrafe II.3 del capítulo II de nuestra tesis.

Cuando la matriz de la parte lineal del sistema (4) presenta uno o dos valores propios nulos y el resto con parte real negativa, Ruiz en 1989 [Ru 2] demuestra que existe la transformación formal que reduce el sistema (4) a la FNSI, dando condiciones de estabilidad de las soluciones en una vecindad del origen de coordenadas.

Ruiz en 1989 [Ru 1] demostró, además, la equivalencia analítica del sistema (4) con alguna de sus Forma Cuasi-Normal (FCN), cuando la matriz

---

[2] ***Esta condición será dad en el epígrafe I.2 del capítulo I.***

[3] ***La definición correspondiente será dada en el epígrafe I.2 del capítulo I.***

A posee *m pares* de valores propios imaginarios puros racionalmente independientes, y el resto con parte real negativa, probando la equivalencia analítica mediante el método Mayorante de Cauchy. Este método es aplicado en el epígrafe I.3.3 del capítulo I de nuestra tesis.

Ya en 1977 Zimka R. [Zi 1] había estudiado el sistema (4) cuando la matriz A tiene un par de valores propios imaginarios puros, demostrando la existencia y convergencia de la transformación que reduce el sistema (4) a la Forma Cuasi-Normal (FCN). La demostración de la convergencia es realizada siguiendo el método de las aproximaciones sucesivas.

En la década de los noventa se reportan los resultados de Basov V.V, el cual estudia un sistema no autónomo con pequeños parámetros como coeficientes de las derivadas. Como caso particular, en [Ba 9], aborda la siguiente ecuación diferencial no autónoma con pequeño parámetro que multiplica la derivada:

$$\varepsilon y' = y + Y(y,x,\varepsilon), \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

donde ε representa el pequeño parámetro, $Y(y,x,\varepsilon)$ es una serie de potencias convergente en una vecindad del origen de coordenadas $y=x=\varepsilon=0$, investigando el problema de la equivalencia analítica entre la ecuación (5) y la forma normal lineal

$$\varepsilon u' = u, \tag{6}$$

a la cual se llega mediante el cambio de variable

$$y = u + h(u,x,\varepsilon). \tag{7}$$

En los años 60 Sibuya Y [Si 2], demostró que la serie de potencias del cambio de variable (7) converge uniformemente en un cierto dominio, donde los coeficientes de la serie son funciones analíticas respecto a *x* y además, tienen desarrollo asintótico en potencias de ε en el dominio de convergencia cuando $\varepsilon \to 0$. Basov en el trabajo [Ba 8] estableció la relación entre la estructura de la serie de la ecuación (5) y la convergencia del cambio de variable (7) en una vecindad del origen de coordenadas $y=x=\varepsilon = 0$.

Los resultados anteriores permitieron finalmente a Basov, en [Ba 9], establecer la convergencia de la transformación (7) demostrando el siguiente resultado:

La ecuación (5) es analíticamente equivalente a la ecuación lineal (6) si se cumple la condición:

Existe $n \in \mathbf{N}$ tal, que $s \leq (r-1)\,n$ si $Y^{(r,s,m)} \neq 0$, (8)

donde s es el grado de x, r es el grado de y y m es el grado de ε, $Y^{(r,s,m)}$ es el coeficiente que responde a las potencias s, r, m en el desarrollo de las series de potencias Y.

Basov en 1994 [Ba 10] generaliza el resultado obtenido para la ecuación (5) a un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales con pequeño parámetro que multiplica la derivada:

$$\varepsilon y'_j = \lambda_j y_j + \sigma_j y_{j-1} + Y_j(y,x,\varepsilon); \quad j=1,\dots,n, \tag{9}$$

donde σ_j toma valores 1 ó 0, λ_j representa los valores propios, Y_j son series de potencias de y,x,ε (j=1,...,n,) convergentes en una vecindad del origen de coordenadas $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = x=\varepsilon = 0$.

En el trabajo antes citado Basov ofrece condiciones que garantizan la convergencia y divergencia de la transformación que reduce el sistema (9) a la FN.

Son conocidos también los resultados obtenidos por Bogoliubov-Mitropolskii, mediante el uso de los métodos cualitativos de la teoría KAM (Kolmogorov, Arnold y Moser), para el estudio de los sistemas oscilatorios con frecuencias básicas de dimensión finita,

$$\dot{x} = \Lambda x + f(t) + \varepsilon X(t,x,\varepsilon) . \tag{10}$$

Cuando los valores propios de la matriz Λ satisfacen la propiedad $Re\lambda_j \neq 0$, j=1,...,n, el sistema (10) tiene solución cuasi-periódica única, la cual tiende para, $\varepsilon \to 0$ a la solución cuasi-periódica del sistema degenerado,

$$\dot{x} = \Lambda x + f(t) , \tag{11}$$

Bibikov en 1995 [Bi 10] extiende los resultados obtenidos por Bogoliubov-Mitropolskii en el estudio del sistema (10) al caso en que los valores propios de la matriz Λ son imaginarios puros.

Basov y Bibikov (1998) construyen un algoritmo para estudiar la estabilidad de la solución nula de un sistema no autónomo de dos ecuaciones con coeficientes continuos [Ba,Bi 12].

En este mismo año Bibikov estudia una ecuación diferencial de segundo orden no autónomo dependiente de un pequeño parámetro donde la función del miembro derecho es suficientemente suave y cuasi periódica respecto a *t.* El autor investiga la familia de toros invariantes y sus oscilaciones, obtiene la ecuación de bifurcación que caracteriza la familia de toros oscilantes así como las propiedades de estabilidad de los mismos [Bi 12].

Para el estudio de los sistemas no autónomos, dependientes y no dependientes de un pequeño parámetro, en nuestra tesis se introduce la FCNG, esta forma normal fue dada en [Ba,Ru,Ve,Be 4] para el estudio de los sistemas autónomos.

OBJETIVOS

Teniendo en cuenta los elementos planteados, nos proponemos reducir un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales a la Forma Cuasi-normal Generalizada (FCNG), garantizando la equivalencia formal entre ambos sistemas. Además, daremos condiciones suficientes que garanticen la equivalencia analítica entre el sistema (4) y su FCNG en ausencia de divisores pequeños[4], así como una condición suficiente de divergencia de la transformación que reduce el sistema (4) a la FCNG.

En el caso en que el miembro derecho del sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales depende de un pequeño parámetro se darán condiciones suficientes que garanticen la equivalencia analítica entre este sistema y la FCNG en presencia de pequeños divisores (este resultado es válido para los sistemas (4)). También nos proponemos estudiar las soluciones periódicas del sistema objeto de estudio una vez reducido a la FCNG, caracterizando la estabilidad de las mismas.

APORTE CIENTÍFICO Y VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL TRABAJO

Los resultados obtenidos en el estudio de los sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, dependientes y no dependientes de un pequeño parámetro, son novedosos, se enmarcan dentro de la teoría de las formas normales de las ecuaciones diferenciales ordinarias y constituyen un aporte científico al generalizar resultados obtenidos en el estudio de los sistemas autónomos.

En nuestro trabajo se estudia un caso más general para el sistema (4) que los estudiados en [Ba, Ru, Pe 3], [Ru 1], [Ru 2], pues los valores propios se toman sobre todo el plano complejo. Para el estudio de este caso se reduce el sistema (4) a la FCNG, con anterioridad la FCNG solamente había sido estudiada para los sistemas autónomos. Además se demuestra la equivalencia formal y analítica entre el sistema (4) y la FCNG en ausencia de divisores pequeños. El problema de la divergencia de la

[4] ***La definición será dada en el epígrafe I.2 del capítulo I.***

transformación que reduce el sistema (4) a una forma normal no había sido tratado anteriormente. En el presente trabajo damos la demostración de una condición de divergencia de la transformación que reduce el sistema (4) a la FCNG, esta condición para los sistemas autónomos fue propuesta por Bruno A.D. [Br 3, Sección 7].

Para un sistema no autónomo con pequeño parámetro demostramos la equivalencia formal y analítica entre este y la FNSI, en presencia de divisores pequeños. El caso de pequeños divisores hasta ahora no había sido tratado para los sistemas no autónomos. La demostración de la equivalencia analítica, para esta clase de sistema, es realizada por el método generalizado de Newton, método aplicado con anterioridad sólo al caso en que se estudia la equivalencia analítica de tales sistemas con la forma normal lineal [Ba,Ru,Pe 3] y la forma normal [Br 3, Sección 11]. Este resultado permitió dar una demostración completa de la equivalencia analítica entre el sistema no autónomo con pequeño parámetro objeto de nuestro estudio y la FCNG en presencia de divisores pequeños.

Se extienden, al sistema no autónomo dependiente de un pequeño parámetro, algunos resultados obtenidos por Bibikov Y. [Bi 1], [Bi 3] para el estudio del comportamiento de las soluciones periódicas y la ecuación de bifurcación en los sistemas autónomos.

Los resultados de nuestro trabajo han sido presentados en los siguientes eventos científicos:

♦ *MATINFO 2001, Evento Internacional de Matemática y Computación, Holguín, Abril 2001.*

♦ *Sixth Conference in Approximation and Optimization in the Caribbean, Ciudad de Guatemala, Marzo 2001.*

♦ *CIMAF 2001 y Cuarta Conferencia Italo-Latinoamericana de Matemática*

Industrial y Aplicada (ITLA), La Habana, Marzo 2001.

- *COMPUMAT 2000 y VI Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, Manzanillo, Nov 2000.*
- *IV Evento Científico Internacional COMAT 99, Matanzas, Nov 1999.*
- *III Evento Científico Internacional COMAT 97, Matanzas, Nov 1997.*
- *COMPUMAT 97 y V Congreso de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación, Cienfuegos, Nov 1997.*
- *I Conferencia Internacional de Matemática y Computación, Santiago de Cuba, Jun 1996.*
- *I Conferencia Científica sobre el desarrollo de la Matemática y Computación, Santiago de Cuba, Jun 1995.*

Siendo publicados los siguientes artículos:

[Ot,Ru 1] Otero A.M., Ruiz A.I.: Forma cuasi-normal generalizada para sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos. Memorias de la I Conferencia Internacional de Matemática y Computación, Santiago de Cuba, Junio 1996 (publicadas en México).

[Ot,Ru 2] Otero A.M., Ruiz A.I.: Sobre el comportamiento de las trayectorias de un sistema de ecuaciones no autónomo con pequeño parámetro. Revista Integración, Vol 16, No 1, Colombia1998.

[Ot,Ru 3] Otero A.M., Ruiz A.I.: Forma cuasi-normal generalizada para sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos. Revista Ciencias Matemáticas, Vol 17, No 2, Cuba 1999.

[Ot,Ru 4] Otero A.M., Ruiz A.I.: Divergencia de la transformación a la FCNG (forma cuasi-normal generelizada). Revista Ciencias Matemáticas, Vol 18, No 1, Cuba 2000.

[*Ot,Ru 5] Otero A.M., Ruiz A.I.: Convergencia de la transformación que reduce la forma normal sobre superficie invariante (FNSI) a la forma cuasi-normal generalizada (FCNG) de un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Proceedings del Sexto Simposio de Matematica y Cuarta Conferencia Italo-Latinoamericana de Matemática Industrial y Aplicada (ITLA), marzo 2001 .*

[Ot,Ru 6] Otero A.M., Ruiz A.I.: Estudio de las trayectorias de un sistema no autónomo con pequeño parámetro. Revista Ciencias Matemáticas, Vol 19, No 1, Cuba 2001.

ESTRUCTURA

La obra cuenta con: Introducción, dos Capítulos, Conclusiones y Recomendaciones, así como la Bibliografía.

En el primer capítulo se da una breve reseña acerca de los antecedentes y desarrollo histórico de la respuesta a los problemas sobre: ***equivalencia formal, equivalencia analítica, divergencia de la transformación normalizante,*** en el estudio de los sistemas autónomos. Se dan las definiciones y condiciones que son utilizadas a lo largo del trabajo: **Forma Normal (FN), Forma Normal sobre Superficie Invariante (FNSI), Forma Cuasi-Normal Generalizada (FCNG)**, ecuación de resonancia, divisores pequeños, equivalencia formal, equivalencia analítica, estas definiciones provienen del estudio de los sistemas autónomos y son generalizados para los sistemas no autónomos. Demuestrandose la equivalencia formal con la FCNG, por el método mayorante de Cauchy. Además se demuestra que si los valores propios de la matrizdel sistema (4) no cumplen la ***condición*** ω'[5]**,** entonces solamente podemos garantizar la equivalencia formal entre el sistema citado y la FCNG.

[5]***La condición será dada en el epígrafe I.2 del capítulo I.***

En el capítulo II se estudia el sistema no autónomo con miembro derecho dependiente de un pequeño parámetro. Las funciones admiten desarrollo en series de potencias convergentes. Los coeficientes de las series de potencias se consideran funciones continuas y 2π-periódicas respecto a t.

Cuando los valores propios de la matriz del sistema satisfacen la ***condición*** $\boldsymbol{\omega}$ [6] y las series de la FN satisfacen la ***condición A*** se demuestra la equivalencia formal y analítica con la FNSI en presencia de divisores pequeños. La demostración de equivalencia analítica se realizó empleando el método generalizado de Newton. Este resultado permitió dar una demostración completa de la equivalencia formal y analítica entre el sistema no autonomo y una FCNG, en presencia de divisores pequeños.

Para el sistema no autonomo, una vez reducido a una FCNG, se hace un estudio del comportamiento de las trayectorias del sistema, investigándose en particular la bifurcación de las soluciones periódicas. Aquí obtenemos las soluciones periódicas y algunas propiedades de estabilidad de las mismas. Para el caso algebraico[7] se obtiene la ecuación de bifurcación de las soluciones periódicas. Estos resultados son aplicados en el estudio de la ecuación de Van der Poll.

---

[6] ***La condición será dada en el epígrafe I.2 del capítulo I***

[7] ***Ver [Bi 1]***

CAPÍTULO I: SISTEMAS NO AUTÓNOMOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En el presente capítulo se esboza el desarrollo histórico conceptual de las formas normales en el estudio de los sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Extendemos a los sistemas no autónomos algunos resultados obtenidos al responder las interrogantes sobre equivalencia formal, equivalencia analítica y divergencia de la transformación normalizante en el estudio del caso autónomo.

El trabajo está dedicado a estudiar un caso más general de sistema no autónomo que los tratados por [Ba,Ru,Pe 2], [Ru 1], [Ru 2] pues los valores propios se encuentran a ambos lados del eje de ordenadas y sobre este, se extiende el concepto de Forma Cuasi-normal Generalizada (FCNG) a los sistemas no autónomos demostrándose la equivalencia formal y analítica entre un sistema no autónomo y una FCNG, esta forma normal fue introducida en [Ba,Ru,Ve,Be 4] para los sistemas autónomos. Además, se extiende a los sistemas no autónomos un resultado obtenido por Bruno [Br 3] en el estudio de la divergencia de los sistemas autónomos.

I.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS DE LOS PROBLEMAS: EQUIVALENCIA FORMAL, EQUIVALENCIA ANALÍTICA Y DIVERGENCIA EN EL ESTUDIO DE LAS FORMAS NORMALES.

El método de las formas normales tiene sus orígenes en la tesis doctoral de H. Poincaré (1879) [Ar 2], él estudió el sistema autónomo de ecuaciones diferenciales,

$$\dot{x}_j = F_j(x), \; j=1,..,n \qquad \text{(I.1.1)}$$

donde $x = (x_1,...,x_n)$, las funciones $F_j(x)$, j=1,...,n, admiten desarrollo en series de potencias en las variables $x_1,...,x_n$, sin términos independientes, que pueden converger en cierta vecindad de $x = 0$. Poincaré obtuvo el siguiente resultado:

Existe la transformación inversible de coordenadas,

$$x_j = \varphi_j(y), \quad \varphi_j(0) = 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{I.1.2}$$

la cual transforma (I.1.1) en el sistema lineal (Forma Normal Lineal)

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{I.1.3}$$

donde los valores propios λ_j (j=1,...,n) de la matriz correspondiente a la parte lineal del sistema (I.1.1) son considerados como puntos del plano complejo y satisfacen las siguientes condiciones:

1.-) Todos los valores propios son distintos y existe una línea recta *“m”* que pasa por el origen tal que todos los puntos están a un mismo lado de dicha recta *“m”*.

2.-) $\lambda_j \neq \langle P, \lambda \rangle := p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n; \quad j = 1, \ldots, n$, para enteros arbitrarios

$p_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} p_j > 1$

El resultado obtenido por Poincaré nos muestra que la forma normal no copia idénticamente al sistema inicial, sino que lo imita deformándolo un poco, así surge la interrogante *“hasta que punto podemos confiar en las propiedades del comportamiento de las soluciones del sistema inicial descritas por la forma normal”.* La respuesta ha esta interrogante es realizada en dos etapas: En la primera se demuestra la equivalencia formal entre el sistema (I.1.1) y el sistema (I.1.3). En la segunda etapa se demuestra la equivalencia analítica entre los sistemas (I.1.1) y (I.1.3).

Las investigaciones sobre los sistemas autónomos por medio de las formas normales se han dirigido fundamentalmente a darles respuesta a las interrogantes sobre la equivalencia formal y analítica, divergencia de la transformación normalizante y el estudio de las soluciones periódicas.

Dulac (1912) [Br 3] sólo consideró que la condición 1) es satisfecha, escogiendo la recta *"m"* de forma tal, que la distancia de los valores propios a la recta *"m"* no crezca con el incremento del subíndice *j*, demostró que mediante una transformación de tipo inversible (I.1.2) el sistema (I.1.1) puede ser transformado en la Forma Normal (FN):

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j + \sum C_{p_1,\ldots,p_j} y_1^{p_1} \ldots y_j^{p_j}; \quad j = 1,2,\cdots n \qquad \text{(I.1.4)}$$

donde la suma en la ecuación *j*-esima se realiza sobre todos los enteros no negativos $p_1,\ldots,p_n$ tales, que $\lambda_j \neq p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n; \quad j = 1,\ldots,n$.

La convergencia de la transformación (I.1.2) fue demostrada mediante el método directo Mayorante de Cauchy. Este método es relativamente simple, no tan preciso como otros, por ejemplo el método iterativo generalizado de Newton.

Después de los resultados de Dulac varios autores encontraron formas normales a las cuales puede reducirse (en ciertos casos) el sistema (I.1.1) mediante una transformación formal, entre las principales contribuciones tenemos los trabajos de Cherry y Birkhoff (1927), Sternberg (1957) y Chen (1963) [Br 3, Introducción] .

Siegel en (1952) introduce la condición,

$$|< P,\lambda >| > \varepsilon |P|^{-\gamma} \qquad \text{(I.1.5)}$$

la que se satisface para algún $\varepsilon > 0$ y $\gamma > 0$, donde,

$< P,\lambda > = p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n$ no es más que el producto escalar entre los vectores, $\lambda \in \mathbf{C}^n$ cuyas coordenadas representan el conjunto de los valores propios de la matriz del sistema, y el vector *P≠ (0,0,...,0)* de componentes enteros no negativos, $P \in \mathbf{Z}_+$. Esta condición fue utilizada para demostrar la convergencia de la transformación (I.1.2) que reduce el sistema inicial (I.1.1) a la FN lineal (I.1.3) por el método mayorante de Cauchy en un caso particular de presencia de divisores pequeños.

La condición (I.1.5) es más débil que la *condición ε*[8]*:*

$$|<P,\lambda>| > \varepsilon > 0; \quad si <P,\lambda> \neq 0, \qquad \text{(I.1.6)}$$

Utilizada en el método mayorante de Cauchy para la demostración de la convergencia de la transformación (I.1.2).

La versión final de la FN fue dada por Bruno A.D. en 1964 [Br 1], quien también obtuvo condiciones que garantizan la convergencia (divergencia) de la transformación en los casos en que se presentan divisores pequeños.

En la década de los 70 y los 80 aparecen los trabajos de Y. Bibikov [Bi 1],[Bi 2], donde se exponen las bases de las ideas y métodos desarrollados por Poincaré, Lyapunov, Dulac, Birkhoff, Siegel, Kolmogorov y Bruno, entre otros autores. Bibikov demuestra la existencia de la transformación que reduce el sistema (I.1.1) a una Forma Normal sobre Superficie Invariante (FNSI) y/o una Forma Cuasi-normal (FCN) en casos particulares de ausencia de pequeños divisores, estudiando además la equivalencia analítica entre los sistemas (I.1.1) y una FNSI y/o una FCN. Aquí las demostraciones de convergencia son dadas mediante el método mayorante de Cauchy [Bi 1].

Cuando los valores propios de la matriz de la parte lineal del sistema se encuentran a ambos lados del eje de la ordenada y un par sobre este, es decir:

---

[8] ***Esta condición más precisa será dada en el epígrafe I.1 del presenta capítulo.***

$$Re\lambda_s = 0; \quad s = 1,2$$
$$Re\lambda_j < 0; \quad j = 3,\ldots,m$$
$$Re\lambda_k > 0; \quad k = m+1,\ldots,n,$$

Basov, Ruiz, Velázquez y Bermúdez (1989) [Ba,Ru,Ve,Be 4], generalizan el concepto de FCN, e introducen el concepto de Forma Cuasi-normal Generalizada (FCNG) demostrando la equivalencia formal y analítica entre el sistema (I.1.1) y una FCNG en ausencia de divisores pequeños. La equivalencia analítica es probada mediante el método mayorante de Cauchy.

La respuesta a las interrogantes sobre la convergencia (divergencia) de la transformación (I.1.2), por ahora según nuestro conocimiento, ha sido establecida solamente en unos pocos casos.

Ya desde Poincaré (1885) se conocía que la transformación (I.1.2) puede converger aún cuando la condición 1) no se satisface este es el llamado,

"caso de un centro" para $n=2$, $\lambda_1 = i\omega$; $\lambda_2 = -i\omega$. En este caso las restricciones corresponden no solamente a las partes lineales, sino a todos los términos de la Forma Normal (FN). Las mismas son condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la integral general $y_1 y_2 = C$, donde C es una constante. Además, Poincaré demostró la analiticidad de esta integral general bajo una suposición equivalente a la analiticidad de la FN. Sin esta suposición la analiticidad de la integral en consideración fue probada por Lyapunov (1892). No obstante ni Poincaré ni Lyapunov buscaron una transformación del sistema inicial a la FN.

En este caso la transformación a la FN fue finalmente obtenida en 1956 por Siegel, quien también demostró la convergencia de la misma. Moser (1958) empleó el método de Siegel y estableció la convergencia de la transformación para el caso:

$n = 4$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ y $\lambda_3 = -\lambda_4$.

Para la clase de problemas en que se considera la presencia de divisores pequeños, o sea $\lambda_j = < P, \lambda >;$ para algún j=1,2,...,n Kolmogorov sugirió que las demostraciones de convergencia de la transformación normalizante debían basarse en el método iterativo generalizado de Newton, dando su primera aplicación en 1954.

Este método ya había sido empleado en 1948 por Kantorovich, para la demostrar la convergencia en el caso en que la FN es lineal y los valores propios satisfacen la condición de Siegel (I.1.5). Una demostración similar fue dada por Pliss en 1965. Más tarde el método fue aplicado por Arnold (1962) y Moser (1966).

En los casos en que aparecen divisores pequeños, Bruno [Br 3] introdujo en la década de los años sesenta la condición ω y la condición ω' para los valores propios. Para la demostración de la convergencia, unida a las condiciones anteriores aparece la condición *A* [Ba 1] impuesta a las series de la FN.

Bruno (1971) [Br 3] con ayuda del método generalizado de Newton, demuestra la convergencia de la transformación (I.1.2) en presencia de divisores pequeños, teniendo como hipótesis el cumplimiento de la condición ω y la condición *A*, cuando los valores propios presentan el siguiente orden:

$Re\, \lambda_j = 0, \quad j = 1,2,...,L$

$Re\, \lambda_k < 0, \quad k = L+1,2,...,n$

Fueron estudiados los siguientes casos,

1.-) Los valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_L$ son conmensurables dos a dos.

2.-) Hay un par de valores inconmensurables en el conjunto $\{\lambda_1,\dots,\lambda_L\}$.

Para un sistema de tipo (I.1.1) donde los valores propios responden a la siguiente clasificación:

$Re\ \lambda_j = 0,\ j=1,2,\dots,L$

$Re\ \lambda_k \neq 0,\ k = L+1,2,\dots,n,$

V.V.Basov (1977) [Ba 2] demostró la existencia y convergencia de la transformación que reduce el sistema (I.1.1) (FNSI), en presencia de divisores pequeños, por el método generalizado de Newton.

Bruno (1994) demuestra, para un sistema de tipo (I.1.1), un criterio sobre la convergencia para los sistemas bidimensionales cuya FN es no trivial [Br,Wa 18].

En (1997) Basov [Ba 11] prueba la convergencia de la transformación normalizante para un sistema autónomo cuando los valores propios poseen parte real negativa, demostrando que la convergencia de la transformación normalizante depende directamente de los exponentes de las variables en que se desarrollan las series de potencias que intervienen en el sistema que se estudia y de la FN.

Los problemas de divergencia de la transformación normalizante ya eran conocidos por Poincaré. Pero la primera prueba completa fue dada por Dulac (1904) para n=2. Su método fue usado más tarde por Siegel (1941) para probar la divergencia de la transformación normalizante en los sistemas hamiltonianos.

En el estudio de los sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad, donde los valores propios son imaginarios puros y algunos de ellos inconmensurables, Siegel (1954) probó que la transformación normalizante diverge para casi todos los sistemas cuya FN contiene términos no degenerados. La importancia de este resultado radica en que demuestra que la no convergencia de la transformación no sólo es causada por la presencia de divisores pequeños, sino que también puede producirse por ciertas propiedades de los términos no lineales de la FN.

Nuevos resultados en esta dirección son ofrecidos en los trabajos de V.V. Basov (1977) [Ba 1] donde, para un sistema de tipo (I.1.1), se prueba la no convergencia de la transformación que reduce el sistema (I.1.1) a una FN, FNSI y FCN cuando no se satisface la condición *A* y la matriz del sistema posee un par de valores propios imaginarios puros.

Basov (1989) [Ba 6] propuso un método para el estudio de la divergencia en el caso de un foco (este problema fue presentado por Siegel en 1959) y enfrentó el problema de la divergencia en forma constructiva. Este método aparece totalmente desarrollado en su tesis doctoral (1978).

Bruno demuestra en 1993 [Br 16], para un sistema de tipo (I.1.1) con un par de valores propios imaginarios puros, la existencia de la transformación que reduce el sistema inicial a la FN. Si las series de potencias, $g_1(y_1 y_2)$ y $g_2(y_1 y_2)$, en la FN satisfacen la condición,

$$g_1 + g_2 = \gamma_m y_1^m y_2^m + \dots \quad ,\gamma_m \neq 0,\ m \geq 1\,, \qquad \text{(I.1.7)}$$

entonces existe un sistema analítico de tipo (I.1.1) con j=1,2 para el cual la transformación normalizante que lo reduce a una FN diverge en cualquier vecindad del punto $y_1 = y_2 = 0$.

La pregunta sobre la convergencia en el caso en que se satisface (I.1.7) estuvo abierta durante mucho tiempo. I.M. Markashov (1972) estuvo tratando de probar la analiticidad de la transformación, pero sus demostraciones contenían errores.

Finalmente Basov en 1978 probó la divergencia de la transformación para algunos casos particulares, pero estas demostraciones son muy engorrosas. Estos resultados fueron demostrados nuevamente por Bruno en 1978.

La teoría de las formas normales es una de las herramientas más usadas en la investigación del comportamiento local de los sistemas de tipo (I.1.1), próximas a los puntos estacionarios. A pesar de ser conocidos ciertos criterios para el estudio del problema de la convergencia (divergencia) de la transformación de tipo (I.1.2), aún hoy no existe un criterio general que resuelva todos los casos posibles.

Otra dirección en que se han obtenidos resultados importantes es en la investigación de las soluciones de los sistemas de tipo (I.1.1) dependientes de un pequeño parámetro, estudiándose el comportamiento de las mismas al variar el pequeño parámetro, es decir las bifurcaciones [Ar 2] de las soluciones del sistema.

Bibikov [Bi 1] obtiene resultados en el estudio del sistema (I.1.1) cuando el miembro derecho depende analíticamente de un pequeño parámetro y la matriz de la parte lineal del sistema posee un par de valores propios imaginarios puros y el resto con parte real distinta de cero, estudiando en particular las bifurcaciones de las soluciones periódicas (este caso también fue estudiado por Shell en 1979). Más tarde Bibikov generaliza este resultado [Bi 3] al caso en que la matriz presenta *2n-pares* de valores propios imaginarios puros probando la existencia de la superficie invariante y la familia de soluciones 2π-periódicas en una vecindad del origen de coordenadas, además, ofrece las correspondientes ecuaciones de bifurcación. Este resultado fue generalizado para el caso en que la matriz del sistema presenta *2n-pares* de valores propios imaginarios puros y el resto con parte real negativa por Salvadori [Sa 1].

Basov, Repilado y Saro [Ba,Re,Sa 5] construyen la ecuación de bifurcación y obtienen condiciones para la solución de esa ecuación para un sistema real, analítico en el origen de coordenadas y dependiente de un parámetro vectorial pequeño, donde la ecuación característica del sistema de primera aproximación presenta raíces imaginarias puras conmensurables dos a dos. Bajo las condiciones anteriores el sistema original es analíticamente equivalente al sistema lineal y posee soluciones periódicas.

En 1991 [Bi 7] son publicados los resultados obtenidos por Bibikov respecto a la existencia de la superficie invariante m-dimensional y las correspondientes familias de soluciones periódicas para los sistemas oscilantes de frecuencias múltiples, obteniendo las correspondientes ecuaciones de bifurcación, así como condiciones de estabilidad para las familias de soluciones periódicas.

Otros resultados en esta dirección pueden ser encontrados por ejemplo en los trabajos de de Basov [Ba 8] y Bruno [Br 17].

Bibikov 1997 [Bi 11] estudia un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias dependientes de un pequeño parámetro cuando la matriz de la parte lineal del sistema posee *L*-pares de valores propios imaginarios puros, el autor estudia la existencia de toros invariantes cuando el pequeño parámetro es positivo.

Otra línea de investigación desarrollada es el estudio de las formas normales mediante los métodos computacionales y el álgebra computacional algunos resultados en esta dirección pueden encontrarse en los trabajos [Br 19], [Br 20], [Br 23], [Br 24], [Bre,Go 1].

I.2.- PRELIMINARES

En este epígrafe daremos los conceptos y notaciones necesarios que ayudarán a la comprensión de nuestro trabajo. Los mismos son válidos para los sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias con y sin pequeños parámetros, siendo estos el objeto de nuestro estudio.

Pasemos a considerar el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = Ax + X(x,t) \tag{I.2.1}$$

donde :

$A \in \mathbf{R}^{nxn}, \quad x \in \mathbf{C}^n$

$$x = col(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$
$$X = col(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Las funciones X_j (j=1,2,...,n) representan series de potencias en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de grado no inferior al segundo, formales o convergentes en una vecindad del origen de coordenadas, con coeficientes continuos y 2π-periódicos respecto a t.

Las mismas admiten la representación:

$$X(x,t) = \sum_{|p| \geq 2} X^{(p)}(t) x^p; \quad x^p := x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n},$$

$|p| := p_1 + \ldots + p_n, \quad p_j$ pertenece a los enteros no negativos,

la serie converge absoluta y uniformemente para $|x| < \rho$ y

$\left|X^{(p)}(t)\right| < c\rho^{-|p|}, c = \text{const}, \quad \rho -$ radio de convergencia, $\text{j} = 1,2,\ldots,\text{n}$

Definición I.1: El *orden* de la serie (*ord X)* es el conjunto de los grados de los monomios que aparecen en su desarrollo.

Ejemplo:

$X(x_1, x_2, t) = X^{(2,3)}(t)\, x_1^2\, x_2^3 + X^{(4,3)}(t)\, x_1^4\, x_2^3 + X^{(4,5)}(t)\, x_1^4\, x_2^5$,

ord X={5,7,9}

Ordenemos los valores propios λ de la matriz A de manera que:

$$Re\lambda_s = 0; \quad s = 1,2,\ldots,L, \quad \lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_L)$$
$$Re\lambda_j < 0; \quad j = L+1,\ldots,m, \quad \lambda'' = (\lambda_{L+1},\ldots,\lambda_m)$$
$$Re\lambda_k > 0; \quad k = m+1,\ldots,n, \quad \lambda''' = (\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n)$$

Podemos considerar el vector $\lambda=(\lambda',\lambda'',\lambda''')$ $(0 \leq L \leq m \leq n)$, cuyas coordenadas representan el conjunto de todos los valores propios de la matriz *A*.

La partición realizada a los valores propios será válida para todas las variables y funciones que intervienen en el trabajo.

Definición I.2: Para el sistema (I.2.1) llamaremos *coeficientes resonantes* a los coeficientes de los términos de las series de potencias correspondiente a un par (p,λ) que satisfacen la igualdad,

$\delta_{p,\lambda} = ik, \qquad k \in \mathbf{Z}^n, \; p \in \mathbf{Z}_+^n$, donde (I.2.2)

$$\delta_{p,\lambda_j} = <p,\lambda> - \lambda_j = \sum_{s=1}^{n} p_s\lambda_s - \lambda_j, \quad \mathrm{j}=1,2,\ldots,n,$$
$$\delta_{p,\lambda} := (\delta_{p,\lambda_1}, \delta_{p,\lambda_2}, \ldots, \delta_{p,\lambda_n}),$$

$p = (p_1,\ldots,p_n)$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

i- es la unidad imaginaria.

En cualquier otro caso los coeficientes son *no resonante.* La ecuación (I.2.2) recibe el nombre de *ecuación de resonancia.* Cuando (I.2.2) se satisface nos encontramos en presencia del *caso de divisores pequeños* [Br 9].

Para un sistema autónomo la *resonancia* se presenta solamente en el caso en que $k=0$ [Bi 1].

Notemos que la aparición de los casos resonantes (I.2.2) en el caso no autónomo, donde $k \neq 0$ impone nuevas dificultades para obtener los coeficientes de las series, lo cual hace que las demostraciones sobre equivalencia formal y analítica de los sistemas tenga un mayor nivel de dificultad.

Definición I.3: Los valores propios de la matriz del sistema se llaman *conmensurables*, si la igualdad $<p,\lambda>= 0$ tiene lugar para algún valor tal, que $p \in \mathbf{Z}_+$, $|p| \neq 0$. En caso contrario diremos que son *inconmensurables* [Gr 1].

Como es sabido de los cursos de Álgebra Lineal, la matriz A del sistema (I.2.1) es llevada a la forma normal de Jordan [Ga 1]. Por tanto existe una transformación lineal no degenerada que reduce el sistema (I.2.1) al sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= J'x' + X'(x,t) \\ \dot{x}'' &= J''x'' + X''(x,t) \\ \dot{x}''' &= J'''x''' + X'''(x,t) \end{aligned} \qquad \text{(I.2.3)}$$

donde J', J'', J''' representan celdas de la matriz en la forma canónica de Jordan de las siguientes dimensiones: J' de dimensión L x L; J'' de dimensión $(m-L)$x$(m-L)$ y J''' de dimensión $(n-m)$x$(n-m)$.

Consideremos además el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= J'y' + Y'(y',t) + \widetilde{Y}'(y,t) \\ \dot{y}'' &= J''y'' + \widetilde{Y}''(y,t) \\ \dot{y}''' &= J'''y''' + \widetilde{Y}'''(y,t), \end{aligned} \qquad \text{(I.2.4)}$$

donde los segundos y terceros sumandos representan series formales de potencias sin términos lineales ni independientes.

Definición I.4: Los sistemas (I.2.3) y (I.2.4) son *formalmente equivalentes* si existe el cambio de variable,

$$\begin{aligned} x' &= y' + h'(y',t)) \\ x'' &= y'' + h''(y',t) \\ x''' &= y''' + h'''(y',t) \end{aligned} \qquad \text{(I.2.5)}$$

el cual reduce el sistema (I.2.3) al sistema (I.2.4), donde los segundos sumandos del miembro derecho de (I.2.5) representan series formales de potencias.

Definición I.5: Si las series que intervienen en los sistemas (I.2.3), (I.2.4) y (I.2.5) son series convergentes entonces los sistemas (I.2.3) y (I.2.4) son *analíticamente equivalentes*.

Si el vector de los valores propios satisface $\lambda=\lambda'$ entonces los sistemas (I.2.3), (I.2.4) y la transformación (I.2.5) quedan reducidos a la primera ecuación.

Definición I.6: El sistema de ecuaciones diferenciales, $\dot{y}' = J'y' + Y'(y',t)$, define una *Forma Norma* (FN) *L*-dimensional si, en el desarrollo de la serie $Y'(y',t)$ todos los coeficientes no resonantes son nulos.

Definición I.7: El sistema (I.2.4) *(0 $\leq$ L $\leq$ m $\leq$ n)* define una *Forma Normal Sobre Superficie Invariante* (FNSI), si $Y'(y',t)$ en su desarrollo contiene sólo términos resonantes y se satisfacen las igualdades:

$$\begin{aligned} &\widetilde{Y}'(y',y'',0,t)=0; \quad \widetilde{Y}'(y',0,y''',t)=0 \\ &\widetilde{Y}'''(y',y'',0,t)=0; \quad \widetilde{Y}''(y',0,y''',t)=0 \end{aligned}$$

Definición I.8: El sistema (I.2.4) *(0 $\leq$ L $\leq$ m $\leq$ n),* donde la primera ecuación es una FN *L*-dimensional y se satisfacen las igualdades,

$$\begin{aligned} &\widetilde{Y}''(y',0,y''',t)=0 \\ &\widetilde{Y}'''(y',y'',0,t)=0, \end{aligned}$$

se llama *Forma Cuasi-Normal Generalizada* (FCNG).

Sobre los hiperplanos $y'' = 0$, $y''' = 0$ quedan definidas las correspondientes Formas Cuasi-Normales (FCN) [Bi 1]. Así la FCN se da solamente para el caso en que los valores propios están situados a un lado del eje de ordenadas y sobre este.

Ejemplo:

Para $y'''=0$ la FCN queda como sigue:

$$\dot{y}' = J'y' + \widetilde{Y}'(y',t)$$
$$\dot{y}'' = J''y'' + \widetilde{Y}''(y,t)$$

Para garantizar la equivalencia analítica entre un sistema autónomo y alguna forma normal (FN, FNSI, FCN, FCNG) a los valores propios de la matriz de la parte lineal del sistema se le ha exigido que satisfagan alguna de las siguientes condiciones: *condición ε, condición ω y la condición ω',*así como el cumplimiento de la *condición A* a las series que intervienen en la forma normal, al respecto algunos resultados pueden encontrarse en los trabajos de [Ba 1] [Ba 2], [Ba,Ru, Pe 3], [Bi 1], [Bi 2], [Br 3], [Br 9], [Ot,Ru 2], [Ot,Ru 3], [Ru 1]. A continuación estas condiciones serán enunciadas, las que en nuestro trabajo permitirán responder a las interrogantes acerca de la convergencia (divergencia) de la transformación normalizante en los sistemas ***no autónomos***.

Condición ε:

Existe $\varepsilon > 0$ para el cual los valores propios λ' de la matriz del sistema (I.2.3) satisfacen la desigualdad:

$$\left|\delta_{p',\lambda'}\right| \geq \varepsilon; \quad \forall (p',\lambda'), \quad \text{donde } p' = (p_1,\ldots,p_L), \quad \lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_L)$$

Esta condición nos dice que a medida que p' y λ' varían nos dan nuevos puntos en el plano, estos puntos se pueden hacer tan cercanos como se deseen, luego lo que se esta haciendo es excluir todos los puntos *ik* donde *i* es la unidad imaginaria y k=0,±1,±2,..., por ello a esta condición se llama también condición de *ausencia de divisores pequeños.*

Condición ω':

Sea $\omega_k = \min\limits_{s} \left| \delta_{p',\lambda_s} \right|$; para todo (p',λ), tal que $\delta_{p',\lambda_s} \neq 0$ donde;

$s = 1,\ldots,L; \quad 2 \le |p'| \le 2^k; \quad k = 1,2,3,\ldots$

Se dice que los valores propios satisfacen la condición ω', si se satisface,

$$\lim_{k \to \infty} 2^{-k} \ln \omega_k^{-1} < +\infty$$

Condición ω:

Sea $\omega_k = \min\limits_{s} \left| \delta_{p',\lambda'_s} \right|$; para todo (p',λ) tal que $\delta_{p',\lambda_s} \neq 0$ donde,

$s = 1,\ldots,L; \quad 2 \le |p'| \le 2^k; \quad k = 1,2,3,\ldots$

Se dice que los valores propios λ' satisfacen la condición ω, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \omega_k^{-1}}{2^k} < +\infty$$

La condición ω' es más débil que la condición ω, pues la convergencia de la serie implica el acotamiento de todos sus términos.

Consideremos que los valores propios de la matriz de la parte lineal del sistema (I.2.1) están distribuidos sobre todo el plano complejo es decir existen valores propios a ambos lados del eje de ordenadas y sobre este, además los valores propios λ' y el vector $\chi \in \mathbf{C}^L$ *con* $\chi_j = ik_j$, $k_j \in \mathbf{Z}$, $j=1,\ldots,L$ donde *i* es la unidad imaginaria son linealmente independientes, entonces la FN *L*-dimensional viene expresada por un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales de orden *L*, es decir el miembro derecho de las ecuaciones en la FN no depende de *t* [Br 3, Sección 11. I].

$$\dot{y}' = J'y' + Y'(y')$$

La condición *A* será definida para el caso anterior.

Condición A:

Existe una serie de potencias $\Omega(y')$ en las variables y' tal, que en la FN para las series $Y'(y')$ es válida la igualdad.

$$Y_s(y') = \lambda_s y_s \Omega(y'); \quad \tau_\alpha = 0; \; s = 1,\ldots,L; \quad \alpha = 2,\ldots,n$$

I.3.- FORMA CUASI-NORMAL GENERALIZADA PARA SISTEMAS NO AUTÓNOMOS.

En este epígrafe iniciamos el estudio del sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las investigaciones para esta clase de sistemas no es tan extensa como para los sistemas autónomos cuyas interrogantes tratadas por la Teoría de las Formas Normales, al cabo de más de cien años de estudio sólo han encontrado respuesta en casos particulares.

Para el sistema (I.2.1) se demuestra la existencia de la transformación que lo reduce a una FCNG, se plantean condiciones que permiten demostrar la equivalencia analítica entre el sistema (I.2.1) y la FCNG por el método Mayorante de Cauchy [Ot,Ru 2].

I.3.1.- FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Estudiemos el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (I.2.1). Supongamos que el mismo ya ha sido transformado al sistema con matriz en la forma normal de Jordan (I.2.3). Supongamos además que los valores propios λ' y el vector $\chi\in\mathbf{C}^L$ *con* χ_j*=* ik_j*,* $k_j\in\mathbf{Z}$*, j=1,...,L* donde *i* es la unidad imaginaria son linealmente independientes.

Entonces la transformación:

$$
\begin{aligned}
x' &= y' + h'(y',t) + \hat{h}'(y',y'',t) + \widetilde{h}'(y',y''',t)\\
x'' &= y'' + h''(y',t) + \widetilde{h}''(y',y''',t)\\
x''' &= y''' + h'''(y',t) + \hat{h}'''(y',y'',t)
\end{aligned}
\qquad \text{(I.3.1.1)}
$$

reduce el sistema (I.2.3) a una FCNG,

$$
\begin{aligned}
\dot{y}' &= J'y' + Y'(y')\\
\dot{y}'' &= J''y'' + \widetilde{Y}''(y,t)\\
\dot{y}''' &= J'''y''' + \widetilde{Y}'''(y,t)
\end{aligned}
\qquad \text{(I.3.1.2)}
$$

Los segundos, terceros y cuartos sumandos del miembro derecho de (I.3.1.1), así como los segundos sumandos del miembro derecho de (I.3.1.2) representan series de potencias formales que satisfacen las propiedades descritas para las series del sistema (I.2.3).

Nuestro propósito es demostrar la *equivalencia formal* entre el sistema (I.2.3) y el sistema (I.3.1.2). En una segunda etapa demostraremos la *equivalencia analítica* entre estos sistemas.

I.3.2- EQUIVALENCIA FORMAL ENTRE LOS SISTEMAS (1.2.3) Y UNA FCNG (1.3.1.2).

La respuesta a la interrogante sobre la equivalencia formal entre los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2) se reduce a demostrar la existencia de la transformación (I.3.1.1).

En este epígrafe probamos que existe la transformación (I.3.1.1) que reduce el sistema (I.2.3) al sistema (I.3.1.2), entonces la demostración se reduce a la obtención de los coeficientes de las series formales, donde, en el caso resonante, los coeficientes de las series de la transformación se obtienen de forma arbitraria, mientras que en el caso no resonante los coeficientes de las series $Y'(y')$ del sistema (I.3.1.2) son idénticamente nulos.

Siguiendo las ideas expuestas por Poincaré, derivando (I.3.1.1) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2), obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que relaciona los sistemas (I.2.3), (I.3.1.1) y (I.3.1.2) [Ot,Ru 2] [Ot,Ru 3]:

$$
\begin{aligned}
&J'[h'+\hat{h}+\tilde{h}]+X'(y'+h'+\hat{h}'+\tilde{h}',y''+h''+\tilde{h}'',y'''+h'''+\hat{h}''',t)=Y'(y')+\\
&+\frac{\partial h'}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \hat{h}'}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \tilde{h}'}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\\
&\frac{\partial \hat{h}'}{\partial y''}[J''y''+\tilde{Y}''(y,t)]+\frac{\partial \tilde{h}'}{\partial y'''}[J'''y'''+\tilde{Y}'''(y,t)]+\dot{h}'+\dot{\hat{h}}'+\dot{\tilde{h}}'\\
&J''[h''+\tilde{h}'']+X''(y'+h'+\hat{h}'+\tilde{h}',y''+h''+\tilde{h}'',y'''+h'''+\hat{h}''',t)=\tilde{Y}''(y,t)+ \quad (\mathrm{I}.3.2.1)\\
&+\frac{\partial h''}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \tilde{h}''}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \tilde{h}''}{\partial y'''}[J'''y'''+\tilde{Y}'''(y,t)]+\dot{h}''+\dot{\tilde{h}}''\\
&J'''[h'''+\hat{h}''']+X'''(y'+h'+\hat{h}'+\tilde{h}',y''+h''+\tilde{h}'',y'''+h'''+\hat{h}''',t)=\tilde{Y}'''(y,t)+\\
&+\frac{\partial h'''}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \hat{h}'''}{\partial y'}[J'y'+Y'(y')]+\frac{\partial \hat{h}'''}{\partial y''}[J''y''+\tilde{Y}''(y,t)]+\dot{h}'''+\dot{\hat{h}}'''
\end{aligned}
$$

Eliminando los paréntesis en el sistema (I.3.2.1) y transponiendo algunos términos convenientemente, tomando los coeficientes de las series del mismo orden p obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{h}'^{(p)} + \dot{\hat{h}}^{(p)} + \dot{\widetilde{h}}'^{(p)} + \delta_{p',\lambda'} h'^{(p)} + \delta_{p',p'',\lambda'} \hat{h}'^{(p)} + \delta_{p',p''',\lambda'} \widetilde{h}'^{(p)} =$$
$$= \tau' h'^{(p)} + \tau' \hat{h}'^{(p)} + \tau' \widetilde{h}'^{(p)} + X'^{(p)} - Y'^{(p)} - (p'+1)\tau' h'^{(p')} -$$
$$-(p'+1)\tau' \hat{h}'^{(p',p'')} - (p''+1)\tau'' \hat{h}''^{(p',p'')} - (p'+1)\tau' \widetilde{h}'^{(p',p''')} -$$
$$-(p'''+1)\tau''' \widetilde{h}'^{(p',p''')} - (p'+1) h'^{(p'-s')} Y'^{(s')} - (p'+1)\hat{h}'^{(p'-s',p'')} Y'^{(s')} -$$
$$-(p''+1)\hat{h}'^{(p'-s',p''-s'')} \widetilde{Y}''^{(s',s'',p''')} - (p'+1)\widetilde{h}'^{(p'-s',p''')} Y'^{(s')} -$$
$$-(p'''+1)\widetilde{h}'^{(p'-s',p'''-s''')} \widetilde{Y}'''^{(s',p'',s''')}$$

$$\dot{h}''^{(p)} + \dot{\widetilde{h}}''^{(p)} + \delta_{p',\lambda''} h''^{(p)} + \delta_{p',p''',\lambda''} \widetilde{h}''^{(p)} = \tau' h''^{(p)} + \tau'' \widetilde{h}''^{(p)} +$$
$$+ X''^{(p)} - \widetilde{Y}''^{(p)} - (p'+1)\tau' h''^{(p')} - (p'+1)\tau' \widetilde{h}''^{(p',p''')} - \qquad (I.3.2.2)$$
$$-(p'''+1)\tau''' \widetilde{h}''^{(p'',p''')} - (p'+1) h''^{(p'-s')} Y'^{(s')} -$$
$$-(p'+1)\widetilde{h}''^{(p'-s',p''')} Y'^{(s')} - (p'''+1)\widetilde{h}''^{(p'-s',p'''-s''')} \widetilde{Y}'''^{(s',p'',s''')}$$

$$\dot{h}'''^{(p)} + \dot{\hat{h}}'''^{(p)} + \delta_{p',\lambda'''} h'''^{(p)} + \delta_{p',p''',\lambda'''} \hat{h}'''^{(p)} = \tau' h'''^{(p)} +$$
$$+ \tau''' \hat{h}'''^{(p)} + X'''^{(p)} - \widetilde{Y}'''^{(p)} - (p'+1)\tau' \hat{h}'''^{(p',p'')} - (p'+1)\tau' h'''^{(p')} -$$
$$-(p''+1)\tau'' \hat{h}'''^{(p',p'')} - (p'+1) h'''^{(p'-s')} Y'^{(s')} -$$
$$-(p'+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p'')} Y'^{(s')} -$$
$$-(p''+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p''-s'')} \widetilde{Y}''^{(s',s'',p''')}$$

Para un estudio detallado tomemos los coeficientes de orden p de las series de forma tal, que respondan a los siguientes casos:

I) Si $p = (p', 0, 0)$ *el sistema* (I.3.2.2) *toma la forma:*

$$\dot{h}'^{(p)}(t) + \delta_{p',\lambda'} h'^{(p)}(t) = \Phi'^{(p)}(t) - Y'^{(p)}$$
$$\dot{h}''^{(p)}(t) + \delta_{p',\lambda''} h''^{(p)}(t) = \Phi''^{(p)}(t) \qquad \text{(I.3.2.3)}$$
$$\dot{h}'''^{(p)}(t) + \delta_{p',\lambda'''} h'''^{(p)}(t) = \Phi'''^{(p)}(t)$$

Las funciones $\Phi^{k\,(p)}$ donde k puede ser $'$, $''$ o $'''$, se obtienen del miembro derecho del sistema (I.3.2.2) tomando aquellos términos de las series formales cuyos coeficientes responden al mismo orden p.

Resolviendo la primera ecuación de (I.3.2.3), diferenciando los casos resonantes y no resonantes, llegamos a los siguientes resultados:

a) Cuando $\delta_{p',\lambda'} \neq ik_o,$ *para todo par* $(p',\lambda'),$ $k_o \in \mathbf{Z}_+$ *la única solución* 2π*-periódica viene dada por la siguiente expresión:*

$$h'^{(p)}(t) = (Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)^{(-1)} \int_t^{t+2\pi} \Phi'^{(p)}(\sigma)\ Exp(\delta_{p',\lambda'}(\sigma - t))\ d\sigma \quad \text{(I.3.2.4)}$$

La solución de la segunda y tercera ecuación del sistema (I.3.2.3) se obtiene de acuerdo con la expresión (I.3.2.4), pues responden al caso no resonante. Así obtenemos los coeficientes de $h''^{(p)}(t)$ y $h'''^{(p)}(t)$.

b.) Si $\delta_{p',\lambda'} = ik_o,$ *para todo par* $(p',\lambda'), k_o \neq 0$ *la solución viene dada por:*

$$h'^{(p)}(t) = CExp(-ik_o t) + \int_0^t \Phi'^{(p)}(\sigma) Exp(ik_o(\sigma - t)) d\sigma - \frac{Y'^{(p)}}{ik_o} Exp(-ik_o t)$$

Para que esta solución sea 2π-periódica es necesario y suficiente que se satisfaga la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \Phi'^{(p)}(\sigma) Exp(ik_o\sigma) d\sigma = 0$$

c) Si $\delta_{p',\lambda'} = 0,$ *la solución viene dada por la expresión:*

$$h'^{(p)}(t) = \int_0^t \Phi'^{(p)}(\sigma) d\sigma - tY'^{(p)};\ t \in [0,2\pi] \quad \text{(I.3.2.5)}$$

La misma es 2π-periódica respecto a t si y sólo si, se satisface la igualdad:

$$Y'^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'^{(p)}(\sigma) d\sigma$$

$II)\ Si\ p=(p',p'',0)\quad entonces\, el\ sistema\, (I.3.2.2)\ queda$
$como\, sigue:$

$$\dot{\hat{h}}'^{(p)}(t)+\delta_{p',p'',\lambda'}\hat{h}'^{(p)}(t)=\hat{\Phi}'^{(p)}(t)$$

$$\dot{\hat{h}}'''^{(p)}(t)+\delta_{p',p'',\lambda'''}\hat{h}'''^{(p)}(t)=\hat{\Phi}'''^{(p)}(t) \qquad \text{(I.3.2.6)}$$

$III)\ Si\ p=(p',0,p''')\ entonces,$

$$\dot{\tilde{h}}'^{(p)}(t)+\delta_{p',p''',\lambda'}\tilde{h}'^{(p)}(t)=\tilde{\Phi}'^{(p)}(t) \qquad \text{(I.3.2.7)}$$

$$\dot{\tilde{h}}''^{(p)}(t)+\delta_{p',p''',\lambda''}\tilde{h}''^{(p)}(t)=\tilde{\Phi}''^{(p)}(t)$$

Las soluciones de los sistemas (I.3.2.6) y (I.3.2.7) se obtienen por medio de expresiones similares a (I.3.2.4), pues estos responden al caso no resonante por las propiedades de los valores propios que intervienen en la ecuación de resonancia.

$IV)\ Si\ p=(p',p'',p''')\quad entonces$

$$\tilde{Y}''^{(p)}=X''^{(p)}-(p'''+1)\tilde{h}''^{(p'-s',p''-s'',p'''-s''')}\tilde{Y}'''^{(s',s'',s''')}$$

$$\tilde{Y}'''^{(p)}=X'''^{(p)}-(p''+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p''-s'',p'''-s''')}\tilde{Y}''^{(s',s'',s''')}$$

Ha quedado demostrado el siguiente teorema:

Teorema I.1 [Ot, Ru 2],[Ot, Ru 3]: El sistema analítico (I.2.3) y la FCNG (I.3.1.2) son formalmente equivalentes.

I.3.3- EQUIVALENCIA ANALÍTICA ENTRE EL SISTEMAS (1.2.3) Y UNA FCNG (1.3.1.2).

Luego de probar la equivalencia formal, si logramos dar condiciones que garanticen la convergencia de las series de la transformación normalizante (I.3.1.1) y de la FCNG (I.3.1.2), habremos obtenido la equivalencia analítica entre los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2), propósito de este epígrafe.

En este epígrafe estudiaremos un caso de ausencia de divisores pequeños, impondremos a los valores propios λ' el cumplimiento de la *condición* ε y a las series *Y′(y′)* la *condición A*, la demostración de equivalencia analítica es realizada por el método directo Mayorante de Cauchy ([Ot, Ru 2], [Ru 1], [Bi1], [Bi 2]).

Teorema I.2 [Ot, Ru 2]: Supongamos que los valores propios λ' de la matriz del sistema analítico (I.2.3) satisfacen la *condición* ε y las series *Y′(y′)* de la FCNG (I.3.1.2) cumplen la *condición A* entonces los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2) son analíticamente equivalentes.

La idea de la demostración del teorema I.2 es la siguiente:

1) La transformación formal (I.3.1.1) es la superposición de las transformaciones:

$$\begin{array}{lll} I)\; x' = y' + h'(y',t) & III)\; x' = y' + \widetilde{h}'(y',y''',t) & II)\; x' = y' + \hat{h}'(y',y'',t) \\ \quad x'' = y'' + h''(y',t) & \quad x'' = y'' + \widetilde{h}''(y',y''',t) & \quad x'' = y'' \\ \quad x''' = y''' + h'''(y',t) & \quad x''' = y''' & \quad x''' = y''' + \hat{h}'''(y',y'',t) \end{array}$$

2) Construimos una serie mayorante para las series de la transformación normalizante (I.3.1.1) y de la FCNG (I.3.1.2)

3) Probamos que la serie mayorante es convergente.

La segunda afirmación se obtiene acotando las soluciones de tipo (I.3.2.4) para los sistemas I), II) y III), obteniéndose la correspondiente expresión de mayoración, la tercera mediante el teorema de las funciones implícitas. Las afirmaciones uno, dos y tres garantizan la convergencia de las series de la transformación normalizante (I.3.1.1) y de la FCNG (I.3.1.2), quedando así demostrada la equivalencia analítica de los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2).

Demostración teorema I.2:

Demostremos la convergencia de las series que aparecen en la transformación I):

Consideraremos los coeficientes de las series de orden *p* que responden al caso a).

Partiendo de la expresión (I.3.2.4) y utilizando la *condición A* obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left|h'^{(p)}\right| \leq \frac{2\pi}{(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)}\left\{\begin{array}{l}\underset{t\in[0.2\pi]}{Sup}\left|X^{(p',0,0)}\right| + \\ +\left|<p'+1,\lambda'>\right| \underset{t\in[0.2\pi]}{Sup}\left|h'^{(p'+e'-s')}\,\Omega^{(s'-e')}y'^{(p')}\right|\end{array}\right\} \quad \text{(I.3.3.1)}$$

De la *condición* ε tenemos que existen las constantes positivas M_1 y M_2 para las cuales se satisfacen las desigualdades:

$$\frac{2\pi}{(exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)} \leq M_1; \quad \frac{2\pi\left|<p'+1,\lambda'>\right|}{(exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)} \leq M_2$$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad (I.3.3.1) por $y'^{p'}$ sumando sobre todo $|p'| \geq 2$ y $s'=1,2,\ldots,n$ obtenemos que existe *C>0* tal que la siguiente relación de mayoración es válida:

$$\sum_{s'=1}^{n} h_{s'}(y',t) \prec C\left\{\sum_{s'=1}^{n} X_{s'}(y'+h,t) + \sum_{s'=1}^{n} h_{s'}(y',t)\sum_{s=1}^{L}\Omega_{s}(y')\right\} \quad \text{(I.3.3.2)}$$

donde *C*=max *{ M₁,M₂}*.

Es conocido que cualquier serie de potencias convergente *X(y′,h)* puede ser expresada como sigue [Bi 1]:

$$X(y',h) = \frac{\alpha\left[\sum_{s=1}^{L} y_s + \sum_{s'=1}^{n} h_{s'}\right]^2}{1-\beta\left[\sum_{s=1}^{L} y_s + \sum_{s'=1}^{n} h_{s'}\right]} \quad \text{(I.3.3.3)}$$

donde α y β son constantes positivas.

Seleccionando las funciones $h_{s'}(y');\quad s'=1,\ldots,n$ de tal manera que, si ponemos

$$u(y')=\sum_{s=1}^{L}\Omega_s(y')+\sum_{s'=1}^{n}h_{s'}(y') \tag{I.3.3.4}$$

entonces,

$$\sum_{s=1}^{L}\Omega_s(y')+\sum_{s'=1}^{n}h_{s'}(y',t)\le u(y') \tag{I.3.3.5}$$

Nuestro objetivo es probar la convergencia de $u(y')$.

Puesto que los coeficientes de $u(y')$ son no negativos, es suficiente considerar $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \eta$.

Además, se satisfacen las relaciones:

$$\begin{gathered} u(y')=y'v(y')=\eta v(\eta) \\ \sum_{s=1}^{L}\Omega_s(y')\quad \sum_{s'=1}^{n}h_{s'}(y')\le\eta^2 v^2(\eta), \end{gathered} \tag{I.3.3.6}$$

Entonces de (I.3.3.2), (I.3.3.3) y (I.3.3.6) obtenemos la siguiente desigualdad:

$$v(\eta)\le\frac{cn\alpha\eta[L+v(\eta)]^2}{1-\beta\eta[L+v(\eta)]}-c\eta v^2(\eta); \tag{I.3.3.7}$$

Existe la función $\omega(\eta)$ tal, que se satisface la ecuación:

$$\omega(\eta)-\frac{cn\alpha\eta\ [L+\omega(\eta)]^2}{1-\beta\eta\ [L\ +\ \omega(\eta)]}-c\eta\omega^2(\eta)=0; \tag{I.3.3.8}$$

la misma puede ser escrita como,

$$\Gamma(\omega(\eta),\eta)=0$$

La función (I.3.3.8) satisface las condiciones del teorema sobre las funciones implícitas [Fi 1]:

$$1)\ \Gamma(0,0)=0$$

$$2)\ \frac{d}{d\omega}\Gamma(0,0)=1$$

Por lo que existe $\omega=\omega(\eta)$, solución única de (I.3.3.8), la cual es analítica en una vecindad del origen y como $v(\eta)<\omega(\eta)$, se garantiza la convergencia de $u(y')$, quedando demostrada la convergencia de las series $h(y',t)$ y $Y'(y')$.

La demostración de la convergencia de las transformaciones II) y III) se realiza de forma análoga, quedando completamente demostrada la equivalencia analítica de los sistemas (I.2.3) y (I.3.1.2)

I.4.- DIVERGENCIA DE LA TRANSFORMACIÓN QUE REDUCE EL SISTEMA (I.2.3) A UNA FCNG (I.3.1.2)

La transformación (I.3.1.1) diverge si al menos una de las series que intervienen en la transformación diverge. En este caso sólo habremos podido garantizar la equivalencia formal entre el sistema (I.2.3) y la FCNG (I.3.1.2).

Bruno en [Br 3, Sección 7] utiliza la *condición* ω' para probar la divergencia de la transformación normalizante en los sistemas autónomos. Demostraremos que esta misma condición garantiza la divergencia de la transformación que reduce el sistema analítico (I.2.3) a una FCNG.

Teorema I.3 [Ot, Ru 3]: Si los valores propios λ' correspondientes al sistema analítico (I.2.3) no satisfacen la ***condición*** ω' entonces la transformación que reduce el sistema analítico (I.2.3) a la FCNG (I.3.1.2) es divergente.

En la demostración del teorema I.3 nuevamente consideramos (I.3.1.1) como la superposición de las transformaciones I), II) y III). Calculando los coeficientes de la serie de la transformación I) de acuerdo con la expresión (I.3.2.4), negando la condición ω', demostramos que los coeficientes de las series de la transformación I) no pueden ser acotados, lo que garantiza que las series de la transformación I) divergen, y por tanto diverge la transformación que reduce el sistema (I.2.3) a la FCNG (I.3.1.2).

Demostración teorema I.3:

Demostremos que la transformación (I.3.1.1) es divergente.

Consideraremos nuevamente (I.3.1.1) como la superposición de las transformaciones I), II) y III), demostremos que I) es divergente.

Si la condición ω' no se satisface entonces:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, 2^{-k}\, ln\,\omega_k^{-1} = +\infty \qquad \text{(I.4.1)}$$

Para cada k, el valor mínimo ω_k es tomado sobre $p'^{(k)} \in N$, por lo que podemos asumir que para,

$$\left|\delta_{p'^{(k)},\lambda'}\right| \neq 0; \quad \left|p'^{(k)}\right| \leq 2^k; \quad \omega_k = \delta_{p'^{(k)},\lambda'}$$

es válida la desigualdad,

$$\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left|\delta_{p'^{(k)},\lambda'}\right|^{(-1)} \geq \left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left|Exp(\delta_{p'^{(k)},\lambda'})-1\right|^{(-1)} \geq 2^{-k}\, ln\,\omega_k^{-1}$$

y de (I.4.1) se deduce que:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left|Exp\ (\delta_{p'^{(k)},\lambda'})-1\right|^{(-1)} = \infty \qquad \text{(I.4.2)}$$

Dado que

$$\Phi'^{(p)} = \tau' h'^{(p')} + X'^{(p)} - (p'+1)\tau' h'^{(p')} - (p'+1)\tau' h'^{(p'-s'+e')} Y'^{(s'-e')}$$

en la expresión (I.3.2.4) es una función continua para todo $t \in [0,2\pi]$, por medio del teorema del valor medio generalizado [Fi 1] obtenemos la siguiente igualdad:

$$\left|h'^{(p)}(t)\right| = \left|Exp(\delta_{p'^{(k)},\lambda'}) - 1\right|^{(-1)} \frac{\left|\Phi'^{(p)}(\xi)\right|}{\left|a^2+b^2\right|}$$

$$\left|aExp(2\pi\delta_{p'^{(k)},\lambda'}) + bExp(2\pi a)(sen(2\pi b) - i\cos(2\pi b)) - \bar{\delta}_{p'^{(k)},\lambda'}\right|$$

donde:

$$a = Re\delta_{p'^{(k)},\lambda'}; \quad b = Im\delta_{p'^{(k)},\lambda'}; \quad \xi \in [0,2\pi]$$

Aplicando logaritmo a ambos miembros y multiplicando por $\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)}$ llegamos a la igualdad,

$$\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left| h'^{(p)}(t) \right| = \left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left| Exp(2\pi\delta_{p'^{(k)},\lambda'}) - 1 \right|^{(-1)} + \left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln \frac{\left|\Phi'^{(p)}(\xi)\right|}{\left|a^2+b^2\right|} +$$

$$+\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left| aExp(2\pi\delta_{p'^{(k)},\lambda'}) + bExp(2\pi a)(sen(2\pi b) - i\cos(2\pi b)) - \bar{\delta}_{p'^{(k)},\lambda'}\right|$$

siendo válida la desigualdad:

$$\left|h'^{(p)}(t)\right|^{\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)}} \geq Exp\left(\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)} ln\left|Exp(2\pi\delta_{p'^{(k)},\lambda'}) - 1\right|^{(-1)}\right)$$

Por (I.4.2) llegamos al siguiente resultado,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|h'^{(p)}(t)\right|^{\left|p'^{(k)}\right|^{(-1)}} = \infty$$

de donde se deduce que,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \ h'^{(p)}(t) \ \right| = \infty ,$$

las series de la transformación I) divergen, y por tanto diverge la transformación que reduce el sistema (I.2.3) a la FCNG (I.3.1.2).

Queda así completamente demostrado el teorema I.3.

CAPITULO II: SISTEMAS NO AUTÓNOMOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS CON PEQUEÑO PARÁMETRO

Este capítulo está dedicado al estudio de un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal con pequeño parámetro, en el mismo se da respuesta a las interrogantes de equivalencia formal y equivalencia analítica con una Forma Normal sobre Superficie Invariante (FNSI) cuando los valores propios de la matriz de la parte lineal del sistema se encuentran distribuidos sobre todo el plano complejo, estudiándose el caso en que se presentan pequeños divisores. Se demuestra la equivalencia formal y la equivalencia analítica entre una FNSI del sistema inicial y una FCNG. Los resultados anteriores garantizan la equivalencia formal y equivalencia analítica entre un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal con pequeño parámetro y una FCNG en el caso de divisores pequeños.

Una vez reducido el sistema inicial a una FCNG se investiga el comportamiento de las trayectorias al variar el pequeño parámetro, en particular se estudian las soluciones periódicas y su bifurcación.

II.1.- FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

Consideremos el sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias con pequeño parámetro:

$$\dot{x} = A\ x + X\ (x,t,\mu) \tag{II.1.1}$$

donde *A* es una matriz de orden *(n* x *n)* con coeficientes reales, cuyos valores propios presentan el siguiente orden,

$$\begin{aligned}
&Re\lambda_s = 0; \quad s = 1,2,\ldots,L, \quad \lambda' = (\lambda_1,\ldots,\lambda_L)\\
&Re\lambda_j < 0; \quad j = L+1,\ldots,m, \quad \lambda'' = (\lambda_{L+1},\ldots,\lambda_m)\\
&Re\lambda_k > 0; \quad k = m+1,\ldots,n, \quad \lambda''' = (\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n)
\end{aligned}$$

En consecuencia aplicamos la siguiente notación $\lambda=(\lambda',\lambda'',\lambda''')$ $(0\leq L \leq m \leq n)$.

Estudiaremos el caso en que los valores propios λ' y el vector $\chi\in$ $\mathbf{C}^L$ con $\chi_j = ik_j$, para $k_j\in\mathbf{Z}$ (*i* es la unidad imaginaria), j=1,...,L son linealmente independientes.

Las funciones X_j (j=1,2, ...,n) son funciones analíticas respecto a la variable $x= col(x_1,\ldots,x_n)$ y al pequeño parámetro $\mu= (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ $(0<|\mu|<<1)$, sin términos de grado cero y grado uno con coeficientes continuos y 2π-periódicas respecto a *t* ($t\in[0,2\pi]$).

Entonces estas funciones admiten la representación,

$$X(x,t,\mu)=\sum_{|p+p^o|\geq 2} X^{(p,p^o)}(t)\ \ x^p\mu^{p^o};$$

$$x^p = x_1^{p_1}.x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n};\quad \mu^{p^o} = \mu_1^{p_1^o}\ldots\mu_m^{p_m^o}$$

$$|p+p^o| = p_1+\ldots+p_n+p_1^o+\ldots+p_m^o;$$

$$p_j\in Z_+;\quad p_k^o\in Z_+;\quad j=1,\ldots,n;\quad k=1,\ldots m,$$

la serie converge absoluta y uniformemente para,

$$|x+\mu|<\rho,\quad y\quad \left|X^{(p,p^o)}(t)\right|<c\rho^{-|p+p^o|},\quad c=const,$$

Por medio de una transformación lineal no degenerada el sistema (II.1.1) es reducido al sistema,

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= J'x' + X'(x,t,\mu)\\ \dot{x}'' &= J''x'' + X''(x,t,\mu)\\ \dot{x}''' &= J'''x''' + X'''(x,t,\mu)\end{aligned}\qquad \text{(II.1.2)}$$

donde J', J'', J''' representan celdas de la matriz en la forma canónica de Jordan de las siguientes dimensiones: J' de dimensión L x L; J'' de dimensión *(m-L)*x*(m-L)* y J''' de dimensión *(n-m)*x*(n-m)*.

La transformación formal:

$$\begin{aligned} x' &= y' + h'(y', t, \mu) \\ x'' &= y'' + h''(y', t, \mu) \\ x''' &= y''' + h'''(y', t, \mu) \end{aligned} \tag{II.1.3}$$

donde los segundos sumandos del miembro derecho son series formales de potencias reduce el sistema (II.1.2) a una Forma Normal sobre Superficie Invariante (FNSI),

$$\begin{aligned} \dot{y}' &= J'y' + Y'(y', \mu) + \widetilde{Y}'(y, \mu, t) \\ \dot{y}'' &= J''y'' + \widetilde{Y}''(y, \mu, t) \\ \dot{y}''' &= J'''y''' + \widetilde{Y}'''(y, \mu, t) \end{aligned} \tag{II.1.4}$$

Nuestra tarea es conocer cuanto se aproxima la FNSI al sistema no autónomo (II.1.2) de ecuaciones diferenciales ordinarias con pequeño parámetro y en que medida la FNSI es capaz de expresar propiedades generales que describan el comportamiento de las soluciones del sistema (II.1.2).

La tarea planteada quedará resuelta cuando sea demostrada la equivalencia formal y analítica entre el sistema (II.1.2) y el sistema (II.1.4).

II.2.- EQUIVALENCIA FORMAL ENTRE EL SISTEMAS (II.1.2) Y UNA FNSI (II.1.4).

Para demostrar la equivalencia formal entre el sistema (II.1.2) y una FNSI (II.1.4) seguiremos las ideas expuestas en el epígrafe I.3.2.

Derivando (II.1.3) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (II.1.2) y (II.1.4), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que relaciona los sistemas (II.1.2), (II.1.3) y (II.1.4) [Ot,Ru 2]:

$$\begin{aligned}
&J'h' + X'(y'+h',y''+h'',y'''+h''',t,\mu) = Y'(y',\mu) + \widetilde{Y}'(y,t,\mu) \\
&+\frac{\partial h'}{\partial y'}[J'y' + Y'(y',\mu) + \widetilde{Y}'(y,t,\mu)] + \dot{h}' \\
&J''h'' + X''(y'+h',y''+h'',y'''+h''',t,\mu) = \widetilde{Y}''(y,t,\mu) + \\
&+\frac{\partial h''}{\partial y'}[J'y' + Y'(y',\mu) + \widetilde{Y}'(y,t,\mu)] + \dot{h}'' \\
&J'''h''' + X'''(y'+h',y''+h'',y'''+h''',t,\mu) = \widetilde{Y}'''(y,t,\mu) + \\
&+\frac{\partial h'''}{\partial y'}[J'y' + Y'(y',\mu) + \widetilde{Y}'(y,t,\mu)] + \dot{h}'''
\end{aligned} \qquad \text{(II.2.1)}$$

Lema II.1: Si el vector $h=(h',h'',h''')$ satisface el sistema (II.2.1) entonces la transformación (II.1.3) existe.

Demostración lema II.1:

Eliminando los paréntesis en el sistema (II.2.1) y transponiendo algunos términos del miembro derecho al miembro izquierdo, para los coeficientes de las series del mismo orden *p* obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
&\dot{h}'^{(p)} + \delta_{p',\lambda'} h'^{(p)} = \tau' h'^{(p)} + X'^{(p)} - Y'^{(p)} - (p'+1)\tau' h'^{(p',p^o)} - \\
&-(p'+1)h'^{(p'-s',p^o-s^o)} Y'^{(s',s^o)} - (p'+1)h'^{(p'-s',p^o-s^o)} \widetilde{Y}'^{(s',p'',p''',s^o)} \\
&\dot{h}''^{(p)} + \delta_{p',\lambda''} h''^{(p)} = \tau'' h''^{(p)} + + X''^{(p)} - \widetilde{Y}''^{(p)} - (p'+1)\tau' h''^{(p',p^o)} - \\
&-(p'+1)h''^{(p'-s',p^o-s^o)} Y'^{(s',s^o)} - (p'+1)h'''^{(p'-s',p^o-s^o)} \widetilde{Y}''^{(s',p'',p''',s^o)} \\
&\dot{h}'''^{(p)} + \delta_{p',\lambda'''} h'''^{(p)} = \tau''' h'''^{(p')} + X'''^{(p)} - \widetilde{Y}'''^{(p)} - (p'+1)\tau' h'''^{(p',p^o)} - \\
&-(p'+1)h'''^{(p'-s',p^o-s^o)} Y'^{(s',s^o)} - (p'+1)h'''^{(p'-s',p^o-s^o)} \widetilde{Y}'''^{(s',p'',p''',s^o)}
\end{aligned} \qquad \text{(II.2.2)}$$

Con el objetivo de realizar un estudio detallado del sistema (II.2.2), lo dividimos en los siguientes casos, los mismos responden a los coeficientes de las series del mismo orden *p*:

$$
\begin{aligned}
&I)\ Si \quad p=(p',0,0,p^{o})\ \text{el sistema}\,(II.2.2)\ \text{queda como sigue,}\\
&\dot{h}'^{(p)}(t)+\delta_{p',\lambda'}h'^{(p)}(t)=\Phi'^{(p)}(t)-Y'^{(p)}\\
&\dot{h}''^{(p)}(t)+\delta_{p',\lambda''}h''^{(p)}(t)=\Phi''^{(p)}(t) \qquad\qquad (II.2.3)\\
&\dot{h}'''^{(p)}(t)+\delta_{p',\lambda'''}h'''^{(p)}(t)=\Phi'''^{(p)}(t)
\end{aligned}
$$

Las funciones $\Phi'^{(p)}$, $\Phi''^{(p)}$ y $\Phi'''^{(p)}$, constituyen el miembro derecho del sistema (II.2.2) que responden a los coeficientes de orden *p= (p',0,0,pº)*

$$
\begin{aligned}
&II)\ Si \quad p=(p',p'',p''',p^{O})\ \text{entonces,}\\
&\tilde{Y}'^{(p)}(t)=X'^{(p)}(t);\quad \tilde{Y}''^{(p)}(t)=X''^{(p)}(t); \qquad (II.2.4)\\
&\tilde{Y}'''^{(p)}(t)=X'''^{(p)}(t)
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (II.2.3), diferenciando los casos resonantes y no resonantes llegamos a los siguientes resultados:

a) Si $\delta_{p',\lambda',s}=ik_s;\ \ k_s\in Z\setminus\{0\};\ \ s=1,\dots,n_o,$ la única solución $2\pi-$periódica viene dada por la expresión:

$$\int_0^{2\pi}\Phi_s'^{(p)}(\sigma)Exp(ik_s(\sigma))d\sigma=0$$

$$h_s'^{(p)}(t)=CExp(-ik_s t)+\int_0^t\Phi_s'^{(p)}(\sigma)Exp(ik_s(\sigma-t))d\sigma-$$

$$-\frac{Y_s'^{(p)}}{ik_s}Exp(-ik_s t) \qquad (II.2.5)$$

Para que la solución (II.2.5) sea 2π-periódica es necesario y suficiente que se satisfaga la igualdad:

b) Cuando $\delta_{p',\lambda',s}=0;\quad s=n_o+1,\dots,n'_o,$ la única solución 2π-periódica viene dada por la expresión,

$$h_s'^{(p)}(t)=\int_0^t \Phi_s'^{(p)}(\sigma)d\sigma - tY_s'^{(p)}; \quad t\in[0,2\pi] \qquad \text{(II.2.6)}$$

la solución (II.2.6) es 2π-periódica si y sólo si se satisface la igualdad:

$$Y_s'^{(p)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_s'^{(p)}(t)dt \qquad \text{(II.2.7)}$$

c.–) Si $\delta_{p',\lambda',s}\neq ik_s,\ k_s\in Z;\quad s=n_o'+1,\ldots,L\ ;$

La única solución 2π-periódica viene dada por:

$$h_s'^{(p)}(t)=(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda',s})-1)^{(-1)}\int_t^{t+2\pi}\Phi_s'^{(p)}(\sigma)\,Exp(\delta_{p',\lambda',s}(\sigma-t))d\sigma \qquad \text{(II.2.8)}$$

d) Cuando $\delta_{p',\lambda'',s}\neq ik_s,\quad k_s\in Z;\quad s=L+1,\ldots,m;$ pues $Re\lambda''\neq 0$

La única solución 2π-periódica viene dada por:

$$h_s''^{(p)}(t)=(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'',s})-1)^{(-1)}\int_t^{t+2\pi}\Phi_s''^{(p)}(\sigma)\,Exp(\delta_{p',\lambda'',s}(\sigma-t))\,d\sigma \qquad \text{(II.2.9)}$$

e) Si $\delta_{p',\lambda''',s}\neq ik_s,\quad k_s\in Z;\quad s=m+1,\ldots,n;\quad pues\quad Re\lambda'''\neq 0$

La única solución 2π-periódica viene dada por:

$$h_s'''^{(p)}(t)=(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda''',s})-1)^{(-1)}\int_t^{t+2\pi}\Phi_s'''^{(p)}(\sigma)Exp(\delta_{p',\lambda''',s}(\sigma-t))d\sigma \qquad \text{(II.2.10)}$$

Los resultados obtenidos nos permiten formular el siguiente teorema.

Teorema II.1 [Ot,Ru 2]: El sistema analítico (II.1.2) y la FNSI (II.1.4) son formalmente equivalentes.

II.3.- EQUIVALENCIA ANALÍTICA ENTRE EL SISTEMAS (II.1.2) Y UNA FNSI (II.1.4).

En este epígrafe estudiamos un caso más general de sistema periódico que los tratados en [Br 3, Sección 11],[Ba,Ru,Pe 2] y [Ru 1], pues los valores propios se consideraran distribuidos sobre todo el plano complejo, investigándose el caso en que aparecen divisores pequeños. Bruno [Br 3, Sección 4, Sección 11] formuló un teorema para el estudio de la analiticidad en casos particulares de sistema autónomo y de sistema periódico cuando estos sistemas son analíticamente equivalentes a la FN. Basov [Ba 2] enunció un teorema análogo para la equivalencia analítica entre un sistema autónomo y una FNSI en presencia de pequeños divisores, tanto Bruno como Basov emplearon en la demostración el método iterativo generalizado de Newton. Nosotros formulamos y demostramos un teorema para el estudio de la equivalencia analítica entre el sistema analítico (II.1.2) y una FNSI., basado en las ideas desarrolladas por Bruno y Basov.

La transformación normalizante (II.1.3) es construida por el método de las aproximaciones sucesivas. Supongamos que existe la transformación (II.1.3) tal que el sistema (II.1.2) se reduce al sistema (II.1.4) en todos los términos (con respecto a y') de orden menor e igual a $2m$ $(ord \leq 2m)$.

Los lemas II.2 y II.3 que se enunciaran dan para las series de los sistemas (II.1.3) y (II.1.4), las estimaciones para todos los términos de orden menor e igual a $2m$ $(ord \leq 2m)$. La demostración del lema II.4, aporta un paso del proceso iterativo en el cual el radio de convergencia *"ρ"* se disminuye y el orden *"m"* de los términos de las series de los sistemas (II.2.3) y (II.2.4) aumentan, manteniéndose válidas las estimaciones obtenidas en los lemas II.2 y II.3. En el teorema II.2, se sigue un proceso iterativo demostrándose que el orden *"m" (m=2^k^, k=1,2,...)* de los términos de las series de los sistemas (II.1.3) y (II.1.4) se hace dos veces mayor en cada paso del proceso iterativo y el radio de convergencia ρ se disminuye en el valor $\Gamma m^{-2/m}$ siendo acotado inferiormente, manteniéndose en cada paso del proceso iterativo las estimaciones obtenidas en los lemas II.2 y II.3. Finalmente se demuestra que la superposición de las transformaciones es analítica, quedando demostrada la convergencia de las aproximaciones sucesivas.

Exijamos el cumplimiento de las siguientes condiciones [Ba,Ru,Pe 2], las mismas serán usadas a lo largo de este epígrafe.

1) $m < ord h < 2m; \quad h = (h', h'', h''')$;

Así el sistema (II.1.4) adopta la forma

$$\begin{aligned}
\dot{y}' &= J'y' + Y'^{2m}(y', \mu) + \widetilde{Y}'^{2m}(y, \mu, t) + Y'^{*}(y, \mu, t) \\
\dot{y}'' &= J''y'' + \widetilde{Y}''^{2m}(y, \mu, t) + Y''^{*}(y, \mu, t) \qquad\qquad (II.3.1) \\
\dot{y}''' &= J'''y''' + \widetilde{Y}'''^{2m}(y, \mu, t) + Y'''^{*}(y, \mu, t)
\end{aligned}$$

donde ord $\widetilde{Y}^{j2m} \leq$ 2m, $j = (', '', ''')$; ord $Y^{j*} > 2m$, $m = 2^k$ $(k \geq 1)$

2) $|h|_\rho = \sum_{|p+p^o| \geq 2} \left| h^{(p,p^o)} \right| \rho^{|p+p^o|}$; $\rho = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_m^2}$

siendo válida la expresión mayorante,

$$|h| \prec |h|_\rho, \quad donde \quad |h| = \sum_{|p+p^o| \geq 2} \left| h^{(p,p^o)} \right| y^p \mu^{p^o}$$

3) $\bar{h}^{2m} = \sum_{|p+p^o|=m}^{2m} h^{(p,p^o)} \; y^p \mu^{p^o}$; $ord\bar{h} \le 2m$

4) $\max \sum_{j=1}^{n} |\bar{X}_j|_\rho < 1 \;\; para \;\; \frac{1}{2} < \rho < 1, \;\; ordX_j > m, \;\; j = 1,\dots,n$,

Lema II.2 : Asumamos que las condiciones *A* y *4)* se satisfacen, entonces,

$$\max \sum_{s=1}^{L} |\mathrm{Y_s}|_\rho \le 1$$

Demostración lema II.2:

El sistema (II.2.3) por coordenadas se escribe como sigue:

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{h}}^{2m}_j + \delta_{p',\lambda} \bar{h}^{2m}_j = \tau_{j+1} \bar{h}^{2m}_j + \bar{X}^{2m}_j - (p_j + 1)\tau_{j+1} \bar{h}^{2m}_j - \theta_j \bar{Y}_k^{2m} \\
&\text{donde} \\
&j = 1,\dots,n; \quad k = 1,\dots,L; \quad \delta_{p',\lambda} = <p', \lambda'> - \lambda_j \\
&p' = (p_1,\dots,p_L), \quad \lambda' = (\lambda_1,\dots,\lambda_L) \\
&\theta_j = \begin{cases} 1 & si \quad j = k \\ 0 & si \quad j = L+1,\dots,n \end{cases}
\end{aligned} \qquad \text{(II.3.2)}$$

En el sistema (II.3.2) consideramos los términos de las series que no superan el orden *2m*, es decir, $m \le |p + p^o| < 2m$.

Desarrollemos la función, $X_j^{2m}(y+h,t,\mu)$ en serie de Taylor, de las condiciones 1) y 4) tenemos que el orden de las series *h* y *X* no es menor que *m* *(ord h* $\ge$ *m, ord X* $\ge$ *m)*, entonces es válida la igualdad, $\bar{X}_j^{2m}(y+h,t,\mu) = \bar{X}_j^{2m}(y,t,\mu)$, pues los restantes términos en el desarrollo en serie de Taylor presentan orden mayor a 2m.

Por la condición *A*, el sistema (II.3.2) queda de la siguiente manera:

$$\dot{\bar{h}}_j^{2m} + \delta_{p'.\lambda} \bar{h}_j^{2m} = \bar{X}_j^{2m} - \theta_j \bar{Y}_k^{2m} \tag{II.3.3}$$

Los coeficientes $\bar{Y}_k^{2m}$(k=1,...,L) se obtienen según la expresión (II.2.7). Tomando módulos en ambos miembros llegamos a la desigualdad,

$$\left| \; Y_k^{2m} \; \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \; \bar{X}_k^{2m}(t) \; \right| \; dt; \quad k = 1, \ldots, L$$

Multiplicando por $\rho^{/p'+p^{\circ}/}$ ambos miembros de la desigualdad, sumando para todo

$| p'+p^{\circ}/ \geq 2$ y s=1, … ,L , considerando la condición *4)* resulta que:

$$\max \sum_{s=1}^{L} \left| \bar{Y}_s \right|_\rho \leq 1 \tag{II.3.4}$$

De lo anterior y por la condición *A*, obtenemos el siguiente resultado:

$$\max \left| \Omega(y', t) \right|_\rho \leq 2 \left| \lambda' \right|^{-1},$$

Lema II.3: Si los valores propios λ' satisfacen la condición ω, y el lema II.2 es válido, entonces existe la constante no negativa M_3, que no depende de ω_k para la que se satisface:

$$\max \sum_{s=1}^{n} \left| \bar{h}_s \right|_\rho \leq M_3 \omega_{k+1}^{-1}; \quad 1/2 < \rho < 1$$

Demostración lema II.3:

El sistema (II.2.3) fue estudiado en el epígrafe II.2, para realizar un estudio detallado del mismo este fue dividido en cinco casos y para cada caso fue escrita su solución. Acotemos las soluciones obtenidas en cada caso:

a) Si $\delta_{p', \lambda', s} = ik_s; \; k_s \in Z \setminus \{0\}; \; s = 1, \ldots, n_o,$ entonces aplicando modulo a ambos miembros de la solución (II.2.5), llegamos a la desigualdad,

$$\left|\bar{h}_s^{2m}(t\right| \leq \left|C_s \quad Exp(-iks \ t)\right| + \int_0^t \left|\bar{X}_s^{2m}(\sigma)\right| \left|Exp(ik_s \ (\sigma - t))\right| d\sigma +$$

$$+ \frac{\left|\bar{Y}_s^{2m}\right|}{\left|ik_s\right|} \left|Exp(-ik_s t)\right|$$

La condición ω nos garantiza que la desigualdad $\left|ik_{S'}\right|^{(-1)} \leq \omega_{K+1}^{(-1)}$ es válida. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad anterior por $\rho^{/P'+P^\circ/}$, sumando para todo $/p'+p^\circ/ \geq 2$ y s =1, … , n_o tenemos:

$$\max \sum_{s=1}^{n_0} \left|h_s\right|_\rho \leq M_s + \int_0^t \max \sum_{s=1}^{n_0} \left|X_s\right|_\rho d\sigma + \omega_{k+1}^{(-1)} \max \sum_{s=1}^{n_0} \left|Y_s\right|_\rho$$

$$\max \sum_{s=1}^{n_0} \left|h_s\right|_\rho \leq M + 2\pi + \omega_{k+1}^{-1} \qquad \text{(II.3.5)}$$

donde $M = \max \{ M_S \}$, $M_S = L \ n_o \ C_S$

$b)$ Si $\delta_{p',\lambda',s} = 0; \quad s = n_o + 1, \ldots, n'_o$

entonces aplicando modulo a ambos miembros de la igualdad (II.2.6) tenemos que,

$$\left|\bar{h}_s^{\ 2m}(t)\right| \leq \int_0^t \left|\bar{X}_s^{\ 2m}(\sigma)\right| d\sigma + 2\pi \quad \left|\bar{Y}_s^{\ 2m}\right|$$

Teniendo en cuenta la condición 4) y el resultado del lema II.2, multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $\rho^{/P'+P^\circ/}$, sumando para todo $/p'+p^\circ/ \geq 2$ y s= n_o+1, … , n'_o tenemos que,

$$\max \sum_{s=n_0+1}^{n_0'} \left|\bar{h}_s\right|_{\rho} \leq 4\pi \tag{II.3.6}$$

En el epígrafe II.2 fueron analizados los casos no resonantes ***c), d) y e)***, la solución del sistema (II.2.3) en cada caso viene dada por las expresiónes (II.2.8), (II.2.9) y (II.2.10) , sin perdida de generalidad los mismos serán analizados a continuación como un caso único.

$\alpha)$ Si $\delta_{p',\lambda,s} \neq ik_s,\quad k_s \in Z;\quad s = n_o' + 1,\ldots,n,$

Entonces, la única solución 2π-periódica viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{h}_s^{2m}(t) = (Exp(2\pi\delta_{p',\lambda,s}) - 1)^{(-1)} \int_t^{t+2\pi} \bar{X}_s^{2m}(\sigma) Exp(\delta_{p',\lambda,s}(\sigma - t)) d\sigma$$

Tomando modulo a ambos miembros de la igualdad tenemos,

$$\left|\bar{h}_s^{2m}(t)\right| \leq \left|(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda,s}) - 1)^{(-1)}\right| \int_t^{t+2\pi} \left|\bar{X}_s^{2m}(\sigma)\right| \left|Exp(\delta_{p',\lambda,s}(\sigma - t))\right| d\sigma$$

Acotando convenientemente la desigualdad anterior tenemos que:

$$\left|\bar{h}_s^{2m}(t)\right| \leq \Psi_s \int_t^{t+2\pi} \left|X_s^{2m}(\sigma)\right| d\sigma, \text{ donde} \tag{II.3.7}$$

$$\Psi_s = \left|(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda,s})\right| \left|(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda,s}) - 1)^{(-1)}\right|$$

Tomemos el número ε suficientemente pequeño, entonces para todo

$$\delta_{p',\lambda,s} = Re\delta_{p',\lambda,s} + i\, Im\delta_{p',\lambda,s}$$

se satisface una de las siguientes alternativas [Ba,Ru,Pe 2]:

1) $\left|Re\delta_{p',\lambda,s}\right| \geq \varepsilon$

$2)\left|Re\delta_{p',\lambda,s}\right|<\varepsilon$ *existe* $k_s\in Z$ *tal que* $Im\delta_{p',\lambda,s}-k_s<\varepsilon;\ \delta_{p',\lambda,s}\neq ik_s$

$3)\left|Re\delta_{p',\lambda,s}\right|<\varepsilon$ *existe* $k_s\in Z$ *tal que* $\varepsilon<Im\delta_{p',\lambda,s}-k_s<1-\varepsilon$

Acotemos Ψ_s para cada una de las alternativas.

1)

$$\Psi_s\leq\begin{cases}(Exp(2\pi\varepsilon)-1)^{(-1)} & para\quad Re\delta_{p',\lambda}<-\varepsilon\\(1-Exp(-2\pi\varepsilon))^{(-1)} & para\quad Re\delta_{p',\lambda}\geq\varepsilon\end{cases}\qquad entonces$$

$$\Psi_s\leq C_1=(1-Exp(-2\pi\varepsilon))^{-1}$$

2) Introduzcamos las siguientes notaciones,

$$Im\tilde{\delta}_{p',\lambda,s}=Im\delta_{p',\lambda,s}-k_s\quad entonces\quad Im\tilde{\delta}_{p',\lambda,s}<\varepsilon:$$

$$\tilde{\delta}_{p',\lambda,s}=Re\delta_{p',\lambda,s}+i\,Im\tilde{\delta}_{p',\lambda,s}$$

La condición ω, garantiza la valides de la desigualdad,

$$\left|\tilde{\delta}_{p',\lambda,k_0}\right|\geq\omega_{k+1}$$

entonces se satisface que,

$$\Psi_s\leq C_2\,\omega_{k+1}^{(-1)};$$
$$donde C_2=Exp(2\pi\varepsilon)(2-Exp(2\pi\sqrt{2}\varepsilon)^{(-1)},\ para\left|\delta_{p',\lambda,s}\right|<\sqrt{2}\,\varepsilon:$$

3) Para $\varepsilon<\left|Im\tilde{\delta}_{p',\lambda,s}\right|<1-\varepsilon$, obtenemos la siguiente expresión,

$$\Psi_s\leq(2-2cos2\pi\varepsilon)^{(-1/2)}=C_3$$

Los razonamientos anteriores nos permiten arribar finalmente a la siguiente desigualdad,

$$\Psi_s \leq C_4 \omega_{k+1}^{(-1)}; \quad \left(C_4 \omega_{k+1}^{(-1)} \geq 1 \right)$$

$$donde \quad C_4 = \max\{C_1, C_2, C_3\}$$
$$los \quad C_\alpha \; son \; constantes \; no \; negativas; \quad \alpha = 1,2,3,4$$

Entonces (II.3.7) queda como sigue:

$$\left| \bar{h}_s^{\,2m}(t) \right| \leq C_4 \omega_{k+1}^{(-1)} \int_t^{t+2\pi} \left| \bar{X}_s^{\,2m}(\sigma) \right| d\sigma$$

Multiplicando por $\rho^{/P'+P^\circ/}$, sumando para todo $/p'+p^\circ/ \geq 2$ y s= $n'_o + 1, \ldots, n$ tenemos:

$$\max \sum_{S=n'_0+1}^{n} \left| \bar{h}_S \right|_\rho \leq C_4 \omega_{k+1}^{-1} \int_t^{t+2\pi} \max \sum_{S=n'_0+1}^{n} \left| \bar{X}_S^{\,2m} \right|_\rho d\sigma$$

Por la condición *4)* la desigualdad anterior queda como sigue,

$$\max \sum_{S=n'_0+1}^{n} \left| \bar{h}_S \right|_\rho \leq 2\pi C_4 \omega_{k+1}^{-1} \qquad \text{(II.3.8)}$$

Sumando las desigualdades (II.3.5), (II.3.6), y (II.3.8) llegamos a la siguiente acotación,

$$\max \sum_{S=1}^{n} \left| \bar{h}_S \right|_\rho \leq M_1 + M_2 \omega_{k+1}^{-1}$$

donde:

$$M_1 = M + 6\pi; \quad M_2 = 2\pi C_4 + 1$$

Finalmente haciendo $M_3 = M1+M2$ llagamos a la acotación final

$$\max\sum_{S=1}^{n}\left|\bar{h}_S\right|_\rho \leq M_3\omega_{k+1}^{-1} \qquad \text{(II.3.9)}$$

Lema II.4: Si las condiciones de los lemas II.2 y II.3 se satisfacen, entonces, para $R < \rho$, $½ < \rho < 1$, se tiene:

$$\max\sum_{S'''=1}^{n}\left|\bar{h}_{S'''}\right|_R \leq m^{-2} \ \text{ y } \ \max\sum_{S'''=1}^{n}\left|\tilde{Y}_{S'''}\right|_R \leq 1 .$$

Demostración lema II.4:

Pongamos $\left\{M_3\omega_{k'+1}^{-1}\right\} = \Gamma^{-m}$, ([Ba 1]).

Introduscamos un nuevo radio de convergencia,

$$r = \Gamma m^{-1/m} \rho \qquad \text{(II.3.10)}$$

Haciendo

$$R = m^{-1/m}\ r = \Gamma m^{-2/m} \rho, \qquad \text{(II.3.11)}$$

logramos disminuir ρ hasta R, $½ < R < r < \rho < 1$.

Acotemos h en R.

Puesto que la desigualdad,

$$\frac{|h|_R}{R^m} \leq \frac{|h|_\rho}{\rho^m}$$

es válida para todas las series que intervienen en la transformación (II.1.3), para todo

$m < | p+p^o | < 2m$, entonces tenemos que la siguiente desigualdad se satisface:

$$\max \sum_{S'''=1}^{n} \left|\bar{h}_{S'''}\right|_R \leq \left(\frac{R}{\rho}\right)^m \max \sum_{S'''=1}^{n} \left|\bar{h}_{S'''}\right|_\rho \leq \Gamma^m m^{-2} \Gamma^{-m} = m^{-2}$$

$$\max \sum_{S'''=1}^{n} \left|\bar{h}_{S'''}\right|_R \leq m^{-2} \qquad \text{(II.3.12)}$$

De las expresiones (II.2.4) y la condición 4) tenemos la desigualdad,

$$\max \sum_{S'''=1}^{n} \left|\widetilde{Y}_{S'''}\right|_R \leq 1 \qquad \text{(II.3.13)}$$

Se ha disminuido ρ hasta R de forma que las series están acotadas por un número pequeño. Las estimaciones (II.3.12) y (II.3.13) son válidas para las series del sistema (II.3.1) cuyo orden no supera $2m$, las mismas se satisfacen para todo $m > 2$ y $k > 1$.

Teorema II.2: Si los valores propios λ' de la matriz del sistema analítico (II.1.2) satisfacen la ***condición*** ω y las series $Y'(y', \mu)$ del sistema (II.1.4) satisfacen la ***condición A***, entonces los sistemas (II.1.2) y (II.1.4) son analíticamente equivalentes.

Demostración teorema II.2:

A continuación se sigue un proceso iterativo. En cada paso del proceso iterativo *"m"* se hace dos veces mayor y *"ρ"* se disminuye en $\Gamma m^{-2/m}$. Cada paso del proceso fue descrito por separado en los lemas II.2-II.4.

Hagamos $m_k = 2^k$ y $\Gamma_k = \left\{C\omega_{k+1}^{-1}\right\}^{-1/m_k}$ (k=1,2,…).

Definamos la ecuación de recurrencia [Br 3]:

$$\rho_{k+1} = \Gamma_k m_k^{-2/m_k} \rho_k$$

Por tanto

$$\rho_{k+1} = \rho_{k^*} \prod_{j=k*}^{k} \Gamma_j m_j^{-2/m_j}$$

Esta expresión representa el enlace de las ρ para las cuales, cuando k tiende a infinito, las ρ_k no tienden a cero, es decir, la sucesión ρ_k esta acotada inferiormente.

Probemos que $\rho_k > 1/2$ para $k > k_o$.

$\Gamma_j m_j^{-2/m_j} < 1$, entonces,

$$\rho_k > \rho_{k^*} \prod_{j=k*}^{\infty} \Gamma_j m_j^{-2/m_j}; \quad k > k*$$

Pero,

$$\prod_{j=k*}^{\infty} \Gamma_j m_j^{-2/m_j} \qquad \text{(II.3.14)}$$

es convergente, es decir, es mayor que cero.

Se conoce que (II.3.14) es converge si la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} Ln \ (\Gamma_j m_j^{-2/m}) \ es \ convergente \ (m_j = 2^j). \qquad \text{[Fi 1]}$$

Veamos que es cierta la convergencia de la anterior serie:

$$\sum_{j=1}^{\infty} Ln \ (\Gamma_j m_j^{-2/m}) = \sum_{j=1}^{\infty} (Ln \ \Gamma_j + Ln \ m_j^{-2/m_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} Ln \ (\Gamma_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Ln \ (m_j^{-2/m}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} Ln(\Gamma_j) - 2 \ Ln2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} Ln \, (C\omega_{j+1})^{-1/m_j} - 2 \ Ln2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} =$$

$$= -\left[LnC \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + 2 \ Ln2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Ln\omega_{j+1}^{-1}}{2^j} \right]$$

Las dos primeras series convergen, la primera por ser una serie geométrica con *q=1/2*, la segunda satisface el criterio de convergencia de D'Alembert [Ku 1] y la tercera converge por la condición ω que es dada como hipótesis del teorema II.2, entonces el producto infinito (II.3.14) converge.

Por consiguiente

$\prod_{j=k*}^{\infty} \Gamma_j m_j^{-2/m_j}$ > 0 por ser convergente,

entonces existe un k^* tal que

$$\prod_{j=k*}^{\infty} \Gamma_j m_j^{-2/m_j} > \frac{1}{2}. \qquad \text{(II.3.15)}$$

ya que converge el producto infinito con el crecimiento de k^*, entonces

$\rho_k > \frac{1}{2}\rho_{k*}$ para todo $k>k^*$.

Supongamos que en el paso inicial del proceso iterativo el sistema (II.1.1) se escribe de la siguiente forma:

$$\dot{x}_o = Ax_o + X_o(x_o, t, \mu); \quad ord\ X_o > m_o \qquad \text{(II.3.16)}$$

Introduzcamos la sucesión de transformaciones de tipo (II.1.3):

$$\begin{aligned} x'_k &= x'_{k+1} + h'_k(x'_{k+1}, t, \mu) \\ x''_k &= x''_{k+1} + h''_k(x'_{k+1}, t, \mu) \quad ; \quad m_k < ord\ h^i_k < m_{k+1} \\ x'''_k &= x'''_{k+1} + h'''_k(x'_{k+1}, t, \mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.17)}$$

Cada una de las transformaciones (II.3.17) reduce el correspondiente sistema:

$$\dot{x}'_k = J'x'_k + X'_k(x_k, \mu) + \widetilde{X}'(x_k, t, \mu)$$
$$\dot{x}''_k = J''x''_k + \widetilde{X}''_k(x_{k,} t, \mu) \qquad \text{(II.3.18)}$$
$$\dot{x}'''_k = J'''x'''_k + \widetilde{X}'''_k(x_{k,} t, \mu)$$

ord< m_k; *ord* $\widetilde{X}^i_k$ > m

al sistema,

$$\dot{x}'_{k+1} = J'x'_{k+1} + X'_{k+1}(x_{k+1}, t, \mu) + \widetilde{X}'_{k+1}(x_{k+1}, t, \mu)$$
$$\dot{x}''_{k+1} = J''x''_{k+!} + \widetilde{X}''_{k+1}(x_{k+1}, t, \mu) \qquad \text{(II.3.19)}$$
$$\dot{x}'''_{k+1} = J'''x'''_{k+1} + \widetilde{X}'''_{k+1}(x_{k+1}, t, \mu)$$

ord X'_{k+1}< m_{k+1}; ord $\widetilde{X}^i_{k+1}$> m_{k+1}

Tomemos k_o > max$\{0, k^*\}$ y definamos la superposición de las k_o transformaciones del tipo (II.3.17) por medio del siguiente sistema

$$x'_{k_o} = x'_{k_o+1} + H'_{k_o}(x'_{k_o+1}, t, \mu)$$
$$x''_{k_o} = x''_{k_o+!} + H''_{k_o}(x'_{k_o+1}, t, \mu) \qquad \text{(II.3.20)}$$
$$x'''_{k_o} = x'''_{k_o+1} + H'''_{k_o}(x'_{k_o+1}, t, \mu)$$

Puesto que las transformaciones del tipo (II.3.17) son polinomios, entonces tenemos un número finito de transformaciones polinomiales por lo que (II.3.20) es una transformación analítica que reduce el sistema analítico inicial (II.3.16) al sistema (II.3.18) para k=k_o, por consiguiente (II.3.18), con k=k_o, es analítico.

Escribamos ρ_{ko}=*1*, sin pérdida de generalidad consideremos,

$$\max \sum_{s'''=1}^{n} \left| \bar{X}^{k_o}_{s'''} \right|_{\rho_{ko}} < 1 .$$

De acuerdo con (II.3.20) ρ_k > *1/2* ; para $k > k_o$, *1/2* < ρ_k<*1*.

Si disminuimos ρ_{ko} de forma tal, que se mantenga mayor que *1/2*, entonces en el sistema (II.3.17) para k = k_o, k_o+1 , …; tenemos que,

$$\max \sum_{s'''=1}^{n} \left| \overline{X}_{s'''}^{k_o+1} \right|_{\rho_{ko+1}} < 1$$

En cada paso del proceso iterativo son válidas las acotaciones obtenidas anteriormente.

Denotemos por:

$$\begin{aligned} x'_{k_o} &= x'_{q+1} + H'_q(x'_{q+1}, t, \mu) \\ x''_{ko} &= x''_{q+!} + H''_q(x'_{q+1}, t, \mu) \\ x'''_{ko} &= x'''_{q+1} + H'''_q(x'_{q+1}, t, \mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.21)}$$

la superposición de q - k_o *+1* transformaciones del tipo (II.3.17), $q \geq k_o$.

De la acotación (II.3.12) tenemos que:

$$\max \sum_{S'''=1}^{n} \left| \overline{H}_{S'''} \right|_{\rho_{q+1}} < \sum_{k=k_o}^{q} m_k^{-2} \qquad \text{(II.3.22)}$$

Pasando en (II.3.22) al límite cuando $q \to \infty$, el sistema (II.3.16) con k = k_o se reduce a la FNSI (II.1.4), la cual es convergente para

$|y + \mu| < \frac{1}{2}$, pues para $k > k_o$, $\rho_k > \frac{1}{2}$, la serie

$\sum_{k=k_o}^{q} m_k^{-2}$ es convergente.

De todo lo anterior se concluye que la superposición de las transformaciones (II.3.20) y (II.3.21) es analítica, pues ellas son convergentes, y transforman el sistema analítico inicial (II.1.2) en una FNSI convergente, entonces se concluye que los sistemas (II.1.2) y (II.1.4) son analíticamente equivalentes.

Queda completamente demostrado el teorema II.2.

II.4.- ESTUDIO DE LA TRANSFORMACIÓN QUE REDUCE UNA FNSI A UNA FCNG.

En este epígrafe nos proponemos reducir la FNSI (II.1.4) a una forma normal más simple Forma Cuasi-Normal Generalizada (FCNG), así como determinar en que medida las propiedades de las soluciones de la FCNG expresan el comportamiento de las soluciones del sistema (II.1.1), demostraremos que el sistema analítico (II.1.4) es formal y analíticamente equivalente a la FCNG.

Estudiaremos el caso en que los valores propios λ' y el vector $\chi \in \boldsymbol{C}^L$ con $\chi_j = ik_j$, para $k_j \in \boldsymbol{Z}$, j=1,...,L son linealmente independientes.

Existe la transformación formal,

$$\begin{aligned} y' &= z' + \hat{h}'(z', z'', t, \mu) + \tilde{h}'(z', z''', t, \mu) \\ y'' &= z'' + \tilde{h}''(z', z''', t, \mu) \\ y''' &= z''' + \hat{h}'''(z', z'', t, \mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.4.1)}$$

donde los segundos y terceros sumandos del miembro derecho son series de potencias formales la cual reduce la FNSI (II.1.4) a la FCNG,

$$\begin{aligned} \dot{z}' &= J'z' + Z'(z', \mu) \\ \dot{z}'' &= J''z'' + \widetilde{Z}''(z, t, \mu) \\ \dot{z}''' &= J'''z''' + \widetilde{Z}'''(z, t, \mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.4.2)}$$

Los sistemas (II.1.4), (II.4.1) y (II.4.2) están relacionados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$J'[\hat{h}' + \widetilde{h}'] + Y'(y',\mu) + \widetilde{Y}'(y,t,\mu) = Z' + \frac{\partial \hat{h}'}{\partial z'}\dot{z}' + \frac{\partial \hat{h}'}{\partial z''}\dot{z}'' +$$

$$+ \frac{\partial \widetilde{h}'}{\partial z'}\dot{z}' + \frac{\partial \widetilde{h}'}{\partial z'''}\dot{z}''' + \dot{\hat{h}}' + \dot{\widetilde{h}}'$$

$$J''\widetilde{h}'' + \widetilde{Y}''(y,t,\mu) = \widetilde{Z}'' + \frac{\partial \widetilde{h}''}{\partial z'}\dot{z}' + \frac{\partial \widetilde{h}''}{\partial z'''}\dot{z}''' + \dot{\widetilde{h}}''$$

$$J'''\hat{h}''' + \widetilde{Y}'''(y,t,\mu) = \widetilde{Z}''' + \frac{\partial \hat{h}'''}{\partial z'}\dot{z}' + \frac{\partial \hat{h}'''}{\partial z''}\dot{z}'' + \dot{\hat{h}}'''$$

Lema II.5: Si los vectores $\hat{h} = (\hat{h}', \hat{h}''')\ y\ \widetilde{h} = (\widetilde{h}', \widetilde{h}'')$ satisfacen el sistema anterior entonces la transformación (II.4.1) existe.

Demostración lema II.5:

Eliminando los paréntesis en el sistema anterior y transponiendo algunos términos del miembro derecho al miembro izquierdo para los coeficientes de las series del mismo orden *p* siendo válido el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{\hat{h}}'^{(p)}+\dot{\tilde{h}}'^{(p)}+\delta_{p',p'',\lambda'}\hat{h}'^{(p)}+\delta_{p',p''',\lambda'}\tilde{h}'^{(p)}=\tau'\hat{h}'^{(p)}+\tau'\tilde{h}'^{(p)}+$$
$$+Y'^{(p)}+\tilde{Y}'^{(p)}-Z'^{(p)}-(p'+1)\tau'\hat{h}'^{(p',p'',p^o)}-$$
$$-(p''+1)\tau''\hat{h}''^{(p',p'',p^o)}-(p'+1)\tau'\tilde{h}'^{(p',p''',p^o)}-$$
$$-(p'''+1)\tau'''\tilde{h}'^{(p',p''',p^o)}-(p'+1)\hat{h}'^{(p'-s',p'',p^o-s^o)}Z'^{(s',s^o)}-$$
$$-(p''+1)\hat{h}'^{(p'-s',p''-s'',p^o-s^o)}\tilde{Z}''^{(s',s'',p''',s^o)}-$$
$$-(p'+1)\tilde{h}'^{(p'-s',p''',p^o-s^o)}Z'^{(s',s^o)}-$$
$$-(p'''+1)\tilde{h}'^{(p'-s',p'''-s''',p^o-s^o)}\tilde{Z}'''^{(s',p'',s''',s^o)}$$

$$\dot{\tilde{h}}''^{(p)}+\delta_{p',p''',\lambda''}\tilde{h}''^{(p)}=\tau''\tilde{h}''^{(p)}+\tilde{Y}''^{(p)}-\tilde{Z}''^{(p)}-$$
$$-(p'+1)\tau'\tilde{h}''^{(p',p''',p^o)}-(p'''+1)\tau'''\tilde{h}''^{(p',p''',p^o)}-$$
$$-(p'+1)\tilde{h}''^{(p'-s',p''',p^o)}Z'^{(s',s^o)}-$$
$$-(p'''+1)\tilde{h}''^{(p'-s',p'''-s''',p^o-s^o)}\tilde{Z}'''^{(s',p'',s''',s^o)} \qquad \text{(II.4.3)}$$

$$\dot{\hat{h}}'''^{(p)}+\delta_{p',p''',\lambda'''}\hat{h}'''^{(p)}=\tau'''\hat{h}'''^{(p)}+\tilde{Y}'''^{(p)}-\tilde{Z}'''^{(p)}-$$
$$-(p'+1)\tau'\hat{h}'''^{(p',p'',p^o)}-(p''+1)\tau''\hat{h}'''^{(p',p'',p^o)}-$$
$$-(p'+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p'',p^o-s^o)}Z'^{(s',s^o)}-$$
$$-(p''+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p''-s'',p^o-s^o)}\tilde{Z}''^{(s',s'',p''',s^o)}$$

Tomemos los coeficientes de las series de orden p de manera que respondan a los siguientes casos:

$a)$ Si $p=(p',0,0,p_o)$ entonces tenemos que,

$$Y'^{(p)}(t)=Z'^{(p)}(t) \qquad \text{(II.4.4)}$$

$b)$ Para $p=(p',p'',0,p_o)$ tenemosque,

$$\hat{h}'^{(p)}(t)+\delta_{p',p'',\lambda'}\hat{h}'^{(p)}(t)=\hat{\Phi}'^{(p)}(t)$$

$$\hat{h}'''^{(p)}(t)+\delta_{p',p'',\lambda'''}\hat{h}'''^{(p)}(t)=\hat{\Phi}'''^{(p)}(t)$$

¡Error!

(II.4.5)

Marcador no definido.

¡Error! Marcador no definido. (II.4.6)

$d)$ Si $p=(p',p'',p''',p_o)$ entonces,

$$\widetilde{Y}'^{(p)}=(p''+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p''-s''+e'',p'''-s''',p_o-s_o)}\widetilde{Z}''^{(s',s''-e''',s''',s_o)}+$$
$$+(p'''+1)\widetilde{h}''^{(p'-s',p''-s'',p'''-s'''+e''',p_o-s_o)}\widetilde{Z}'''^{(s',s'',s'''-e''',s_o)}$$
$$\widetilde{Y}''^{(p)}=\widetilde{Z}''^{(p)}+$$
$$+(p'''+1)\widetilde{h}''^{(p'-s',p''-s'',p'''-s'''+e''',p_o-s_o)}\widetilde{Z}'''^{(s',s'',s'''-e''',s_o)} \qquad \text{(II.4.7)}$$
$$\widetilde{Y}'''^{(p)}=\widetilde{Z}'''^{(p)}+$$
$$+(p''+1)\hat{h}'''^{(p'-s',p''-s''+e'',p'''-s''',p_o-s_o)}\widetilde{Z}''^{(s',s''-e''',s''',s_o)}$$

Los sistemas (II.4.5) y (II.4.6) presentan propiedades similares a los sistemas (I.3.2.6) y (I.3.2.7) estudiados en el epígra

Los sistemas (II.4.5) y (II.4.6) presentan propiedades similares a los sistemas (I.3.2.6) y (I.3.2.7) estudiados en el epígrafe I.3.2. Por lo que sus soluciones se obtienen por medio de expresiones análogas a (I.3.2.4).

Ha quedado demostrado, el siguiente teorema:

Teorema II.3: El sistema analítico (II.1.4) y la FCNG (II.4.2) son formalmente equivalentes.

II.4.1.- EQUIVALENCIA ANALÍTICA ENTRE UNA FNSI (II.1.4) Y UNA FCNG (II.4.2).

Teorema II.4: Sea el sistema analítico (II.1.4). Si las series $Z'(z',\mu)$ del sistema (II.4.2) satisfacen la **condición A**, entonces los sistemas (II.1.4) y (II.4.2) son analíticamente equivalentes.

La demostración será realizada por el método mayorante de Cauchy. Método utilizado en el epígrafe I.3.3 del presente trabajo.

Demostración teorema II.4:

Consideremos la transformación (II.4.1) como la superposición de las transformaciones:

$$\alpha)\ \begin{aligned} y' &= z' + \hat{h}'(z',z'',t,\mu) \\ y'' &= z'' \\ y''' &= z''' + \hat{h}'''(z',z'',t,\mu) \end{aligned} \qquad \beta)\ \begin{aligned} y' &= z' + \widetilde{h}'(z',z''',t,\mu) \\ y'' &= z'' + \widetilde{h}''(z',z''',t,\mu) \\ y''' &= z''' \end{aligned}$$

Demostremos la convergencia de las series que aparecen en la expresión $\beta)$.

La solución del sistema (II.4.6) se obtiene por medio de una expresión similar a (I.3.2.4), ya que este es un caso análogo al estudiado en el epígrafe I.3.2 (caso no resonante *a)*). Haciendo uso de la condición A, llegamos a la siguiente acotación:

$$\left|\widetilde{h}'^{(.)}\right| \le C\left\{ \underset{t\in[0.2\pi]}{Sup}\left|\widetilde{h}'^{(.)}\right| + \underset{t\in[0.2\pi]}{Sup}\left|\widetilde{h}'^{(.)}\Omega^{(.)}z'^{(.)}\right| \right\} \qquad \text{(II.4.1.1)}$$

donde $C = max\ \{M_1, M_2\}$,

$$M_1 \geq \frac{(Exp(2\pi\, Re\delta_{p',p''',\lambda'})-1)\left|p'''\tau'''\right|}{Re\delta_{p',p''',\lambda'}\left|(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)\right|} \quad , \quad Re\delta_{p',p''',\lambda'} > \varepsilon > 0$$

$$M_2 \geq \frac{(Exp(2\pi\, Re\delta_{p',p''',\lambda'})-1)\left|< p'+1,\lambda' >\right|}{Re\delta_{p',p''',\lambda'}\left|(Exp(2\pi\delta_{p',\lambda'})-1)\right|}$$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad (II.4.1.1) por,

$$\widehat{z}^{(\widehat{p})} = z_1^{p_1}\ldots z_L^{p_L}.z_{m+1}^{p_{m+1}}\ldots z_n^{p_n}, \; donde$$
$$\widehat{p} = (p_1,\ldots,p_L,p_{m+1},\ldots,p_n); \quad \widehat{z} = (z_1,\ldots,z_L,z_{m+1},\ldots,z_n)$$

Sumando sobre todo $\left|p' + p'' + p^o\right| \geq 2$ y $s' = \{i \cup j \therefore i = 1,2,\ldots,L; j = L+1,\ldots,m\}$

obtenemos la siguiente relación de mayoración:

$$\sum_{s'=1}^{m} \widetilde{h}_{s'}(\widehat{z},t,\mu) \prec C\left\{\sum_{s'=1}^{m}\widetilde{h}_{s'}(\widehat{z},\mu) + \sum_{s'=1}^{m}\widetilde{h}_{s'}(\widehat{z},\mu)\sum_{s=1}^{L}\Omega_s(z',\mu)\right\} \tag{II.4.1.2}$$

Consideremos los vectores definidos como sigue:

$$r = (r_1,\ldots,r_L,r_{m+1},\ldots,r_n,r_{n+1},\ldots,r_q); \quad donde$$
$$r_1 = z_1,\ldots,r_L = z_L, r_{m+1} = z_{m+1},\ldots,r_n = z_n, r_{n+1} = \mu_1,\ldots,r_q = \mu_m;$$
$$r' = (r_1,\ldots,r_L,r_{n+1},\ldots,r_q)$$

Entonces (II.4.2) toma la forma:

$$\sum_{s'=1}^{m} \widetilde{h}_{s'}(r,t) < C\left\{\sum_{s'=1}^{m}\widetilde{h}_{s'}(r) + \sum_{s'=1}^{m}\widetilde{h}_{s'}(r)\sum_{s=1}^{L}\Omega_s(r')\right\} \tag{II.4.1.3}$$

Para las series convergentes es conocido el siguiente resultado [Bi 1].

$$\Omega(r')=\frac{\alpha'\left[\sum_{k=1}^{q} r'_k\right]^2}{1-\beta'\left[\sum_{k=1}^{q} r'_k\right]}$$, donde α' y β' son constantes no negativas.

La convergencia de esta serie fue demostrada en el epígrafe anterior.

Seleccionando las funciones $h_s(r)$ (s=1,…,m) de tal manera que si

ponemos $u(r)=\sum_{j=m+1}^{n}\tilde{Z}_j(z')+\sum_{s=1}^{m}h_s(r)$ se tiene la siguiente expresión de

mayoración, $\sum_{j=m+1}^{n}\tilde{Z}_j(r,t)+\sum_{s=1}^{m}h_s(r,t)\leq u(r)$

Demostremos que $u(r)$ es convergente.

Puesto que los coeficientes de $u(r)$ son no negativos, es suficiente considerar $r_1 = r_2 = ... = r_n = \eta$. Admitamos además que:

$u(r)=r\,v(r)=\eta v(\eta),$ *siendo válida la acotación,*

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{Z}_j(r)+\sum_{s=1}^{m}h_s(r)\leq\eta^2v^2(\eta),$$

entonces obtenemos la siguiente desigualdad,

$$v(\eta)\leq Cv(\eta)+\frac{Cv(\eta)\eta^2L\alpha'[L++q+v(\eta)]^2}{1-\beta'\eta[L++q+v(\eta)]}$$

Existe la función $w(\eta)$ tal que se satisface la ecuación:

$$w(\eta)-Cw(\eta)-\frac{Cw(\eta)\eta^2L\alpha'[L+q+w(\eta)]^2}{1-\beta'\eta[L+q+w(\eta)]}=0$$

La cual puede ser escrita como sigue,

$$\Delta(w(\eta),\eta)=0 \qquad \text{(II.4.1.4)}$$

Probemos que la ecuación (II.4.1.4) satisface las condiciones del teorema sobre las funciones implícitas:

$$1)\, \Delta(0,0)=0$$

$$2)\, \frac{d}{dw}\Delta(0,0)=1-C$$

De acuerdo como fueron tomadas las constantes M_1 y M_2, siempre se puede considerar $C\neq 1$, lo que garantiza se satisfagan las condiciones del teorema de las funciones implícitas.

Por lo que existe $\omega(\eta)$ solución única de (II.4.1.4), la cual es analítica en una vecindad del origen y como $v(\eta)<\omega(\eta)$, queda garantizada la convergencia de las series.

La convergencia de la transformación α), se demuestra de forma completamente análoga.

Queda demostrada la equivalencia analítica entre los sistemas (II.1.4) y (II.4.2).

II.4.2.- REDUCCIÓN DEL SISTEMA INICIAL (II.1.2) A UNA FCNG (II.4.2).

El sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales dependiente de un pequeño parámetro (II.1.2) puede ser reducido a una FCNG (II.4.2) directamente, basta con considerar la superposición de las transformaciones (II.1.3) y (II.4.1). Entonces son válidos los siguientes resultados:

Teorema II.5: El sistema analítico (II.1.2) y la FCNG (II.4.2) son formalmente equivalentes.

Teorema II.6: Si para los valores propios de la matriz del sistema analítico (II.1.2) se satisface la condición ω y las series $Z'(z',\mu)$ del sistema (II.4.2) satisfacen la condición *A*, entonces los sistemas (II.1.2) y (II.4.2) son analíticamente equivalentes.

Las demostraciones de los teoremas II.5 y II.6 son consecuencia directa de las demostraciones de los teoremas II.1, II.2 y II.4. Quedando garantizada la equivalencia formal y analítica entre el sistema (II.1.2) y una FCNG para los sistemas no autónomos con pequeño parámetro en presencia de pequeños divisores.

II.5- ESTUDIO DE LAS SOLUCIONES PERIÓDICAS DEL SISTEMA (II.1.1).

En este epígrafe estudiaremos las soluciones periódicas del sistema (II.1.1) una vez reducido a la FCNG (II.4.2) mediante la superposición de las transformaciones (II.1.3) y (II.4.1) [Ot,Ru 1].

Supongamos que el vector de los valores propios λ' tiene como coordenadas exactamente *L* pares de valores propios imaginarios puros, $\lambda'=(\pm i\omega_1,\pm i\omega_2,\ldots,\pm i\omega_L)$ donde los ω_j , j=1,...,L , son inconmensurables, el resto de los vectores λ'' y λ''' tienen coordenadas que satisfacen el orden definido en los epígrafes I.2 y II.1. Además las series $Z'(z',\mu)$ serán consideradas de la siguiente forma [Bi 1, Sección 7],

$$Z'(z',\mu)=\begin{cases} z_{2s'-1}P_{2s'-1}(z_1z_2,\ldots,z_{L-1}z_L,\mu) \\ z_{2s'}P_{2s'}(z_1z_2,\ldots,z_{L-1}z_L,\mu) \end{cases}$$

donde $P_{2s'}$ es el conjugado de $P_{2s'-1}$, $s'=1$, ... ,L.

Las series $P_{s'}(z_1z_2,\ldots,z_{L-1}z_L,\mu)$ se representan como sigue:

$$P_{s'}(z_1 z_2,\ldots,z_{L-1} z_L,\mu) = G_{s'}(z_1 z_2,\ldots,z_{L-1} z_L,\mu) + i H_{s'}(z_1 z_2,\ldots,z_{L-1} z_L,\mu),$$

donde $G_{S'}$ y $H_{S'}$ son series de coeficientes reales, que se determinan por medio de expresiones similares a (II.2.7).

Para un estudio detallado de las soluciones periódicas del sistema (II.1.1) analicemos los siguientes casos [Bi 1, Sección 13]:

1.- Caso trascendente $G_{s'} = 0$.

Entonces el sistema (II.4.2) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{s'} &= i\delta_{s'} z_{s'} [\omega_{s'} + H_{s'}(z_1 z_2,\ldots,z_{L-1} z_L,\mu)] \\ \dot{z}'' &= J'' z'' + \widetilde{Z}''(z,t,\mu) \\ \dot{z}''' &= J''' z''' + \widetilde{Z}'''(z,t,\mu), \end{aligned} \qquad \text{(II.5.1)}$$

donde

$$\delta_{s'} = \begin{cases} 1 & si \quad s' = 2n-1 \\ -1 & si \quad s' = 2n; \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Las trayectorias cerradas del sistema (II.5.1) se expresan por:

$$\begin{aligned} z_{2s'} z_{2s'-1} &= \widetilde{c}_{s'} \\ z'' &= 0 \\ z''' &= 0, \end{aligned} \qquad \text{(II.5.2)}$$

donde:

$$z_{2s'} = \bar{c}_{2s'} Exp(\; i(\omega_{2s'} + H_{s'}(\widetilde{c}_{s'},\mu))) \qquad \text{(II.5.3)}$$

$$z_{2s'-1} = \bar{c}_{2s'-1} Exp(-i(\omega_{2s'-1} + H_{s'}(\widetilde{c}_{s'},\mu)))$$

Las soluciones periódicas del sistema (II.1.1) se obtienen, en este caso, sustituyendo en la transformación resultante de la superposición de las transformaciones (II.1.3) y (II.4.1), la solución (II.5.3) correspondiente a la primera ecuación del sistema (II.5.1), considerando los hiperplanos *z′′=0* *y* *z′′′=0.*

Teorema II.7 : Si se satisface la condición:

$P_{2s'}(z_1z_2,\ldots,z_{L-1}z_L,\mu)+P_{2s'-1}(z_1z_2,\ldots,z_{L-1}z_L,\mu)$=0,

entonces los sistemas (II.1.1) y (II.4.2) son analíticamente equivalentes.

Este resultado generaliza los resultados para los sistemas autónomos, obtenidos por: [Bi 1, Sección 13], [Bi 3] y Bruno [Br 16].

De los resultados anteriores llegamos a las siguientes conclusiones:

Corolario 1: *Sobre la superficie invariante definida por el hiperplano z′′=0 las trayectorias del sistema (II.4.2), y por consiguiente las soluciones periódicas del sistema (II.1.1), son inestables.*

Corolario 2: *Sobre la superficie invariante definida por el hiperplano z′′′=0 las trayectorias de los sistemas (II.4.2) y (II.1.1) son estables.*

2.-) Caso algebraico $G_{S'} \neq 0$.

Supongamos que N es el grado del término de menor grado de $G_{s'}$ y consideremos en la superposición de las transformaciones (II.1.3) y (II.4.1), polinomios cuyos grados no son superiores a N y se obtienen de las series de la transformación mediante un truncamiento en su desarrollo, por lo que la superposición de las transformaciones (II.1.3) y (II.4.1) adopta la forma:

$$\begin{aligned} x' &= y' + h'^N(y',t,\mu) + \hat{h}'^N(y',y'',t,\mu) + \tilde{h}'^N(y',y''',t,\mu) \\ x'' &= y'' + h''^N(y',t,\mu) + \tilde{h}''^N(y',y''',t,\mu) \\ x''' &= y''' + h'''^N(y',t,\mu) + \hat{h}'''^N(y',y'',t,\mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.5.4)}$$

Por lo tanto el sistema (II.4.2) se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{y}_{S'} &= i\delta_{s'}\omega_{s'}y_{s'} + i\delta_{s'}y_{s'}H_{s'}^N(y_{2s'-1}y_{2s'},\mu) + y_{s'}G_{s'}^N(y_{2s'-1}y_{2s'},\mu) + Y_{s'}^*(y_{2s'-1}y_{2s'},t,\mu) \\ \dot{y}'' &= J''y'' + \tilde{Y}''^N(y,t,\mu) + \tilde{Y}''^*(y,t,\mu) \\ \dot{y}''' &= J'''y''' + \tilde{Y}'''^N(y,t,\mu) + \tilde{Y}'''^*(y,t,\mu) \end{aligned} \qquad \text{(II.5.5)}$$

donde en $Y^{*}_{s'},\tilde{Y}''^{*},\tilde{Y}'''^{*}$,están contenidos los términos de grado superior a N.

Teorema II.8: Los sistemas (II.1.1) y (II.5.5) son analíticamente equivalentes.

Demostración teorema II.8:

Las series de la transformación (II.5.4) constituyen polinomios, lo que garantiza la convergencia de la transformación (II.5.4). Entonces como resultado de la transformación (II.5.4) los elementos del sistema (II.5.5) también constituyen series convergentes por ser polinomios [Di 1]. Queda así garantizada la equivalencia analítica entre los sistemas (II.1.1) y (II.5.5).

Por medio del cambio de variables:

$$\begin{aligned} y_{2s'-1} &= \rho_{s'} Exp(i\varphi_{s'}) \\ y_{2s'} &= \rho_{s'} Exp(i\varphi_{s'}) \\ y'' &= z \\ y''' &= v \end{aligned} \qquad \text{(II.5.6)}$$

el sistema (II.5.5) toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{s'} &= \rho_{s'} G^{N}_{s'}(\rho^2,\mu) + o(\rho^2\mu)^{N+1} \\ \dot{\varphi}_{s'} &= \omega_{s'} + \delta_{s'} H^{N}_{s'}(\rho^2,\mu) + o(\rho^2\mu)^{N+1} \\ \dot{z} &= J''z + Z^{N}(\rho^2,\varphi,z,v,t,\mu) + o(\rho^2\mu)^{N+1} \\ \dot{v} &= J'''v + V^{N}(\rho^2,\varphi,z,v,t,\mu) + o(\rho^2\mu)^{N+1} \end{aligned} \qquad \text{(II.5.7)}$$

Del sistema (II.5.7) obtenemos que la expresión:

$$G^{N}_{s'}(\rho^2,\mu) = 0 \qquad \text{(II.5.8)}$$

define la ecuación de bifurcación de las soluciones periódicas del sistema (II.4.2) [Bi 7].

Cuando se satisfacen las condiciones del teorema de las funciones implícitas:

$$1.-)G_{s'}(0,0)=0, \quad 2.-)\frac{\partial G_{s'}(0,0)}{\partial \mu}\neq 0,$$

existe una única solución analítica $\mu=\mu(\rho^2)$ de (II.5.8) en una vecindad del punto (0,0). Para cada solución $\rho=\rho_o;\mu=\mu_o$ de (II.5.8) se obtienen trayectorias cerradas del sistema (II.5.7), y por consiguiente al sistema (II.1.1) le corresponden soluciones periódicas.

II.5.1 – EJEMPLO DE APLICACIÓN (ESTUDIO DE UN CIRCUITO ELÉCTRICO R- L- C)

Examinemos el circuito en serie simple que contiene un inductor (L), un capacitor (C) y un resistor (R).

Según la ley de Kirchhoff, el voltaje a través de un circuito cerrado debe ser igual a la caída de voltaje en el mismo. La ecuación diferencial que modela este fenómeno es similar a la ecuación que se usa en los sistemas masa resorte. En general este fenómeno es expresado por una ecuación de Van der Poll del tipo [Gr 1]:

$$\ddot{x}+\omega^2 x = f(x,\dot{x},\mu,t), \tag{II.5.1.1}$$

donde ***x*** representa la tensión de la corriente en la lámpara eléctrica, μ es un pequeño parámetro que identifica el número de conexiones existente entre la lámpara y el circuito; $f(x,\dot{x},\mu,t)$ es una función de entrada, analítica respecto de $x,\dot{x},\ \mu$, con coeficientes continuos y 2π- periódicos respecto de t.

Por medio del cambio de variables $\dot{x}=x_1$ reducimos (II.5.1.1) a un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo estudiado:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + f(x_1,x_2,\mu,t).\end{cases} \tag{II.5.1.2}$$

La transformación lineal no degenerada $x = Py$ reduce el sistema (II.5.1.2) al sistema:

$$\dot{y}_1 = \omega i y_1 + F(y_1, y_2, \mu, t)$$
$$\dot{y}_2 = -\omega i y_2 - F(y_1, y_2, \mu, t), \qquad \text{(II.5.1.3)}$$

donde ω representa la frecuencia propia del sistema.

El cambio de variables

$$y_1 = u + h_1(u, v, t, \mu)$$
$$y_2 = v + h_2(u, v, t, \mu) \qquad \text{(II.5.1.4)}$$

reduce el sistema (II.5.1.3) al sistema:

$$\dot{u} = i\omega u + P_1(u, v, \mu)$$
$$\dot{v} = -i\omega v + P_2(u, v, \mu), \qquad \text{(II.5.1.5)}$$

donde v es el complejo conjugado de u.

Derivando (II.5.1.4) a lo largo de las trayectorias de los sistemas (II.5.1.3) y (II.5.1.5), se obtiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales del tipo (II.2.1). Si en este sistema agrupamos convenientemente los términos llegamos a que los coeficientes de orden p satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales análogo al sistema (II.2.2):

$$\dot{h}_1 + \delta_1 \omega i h_1 = \Phi_1(u, v, t, \mu) - P_1(u, v, \mu)$$
$$\dot{h}_2 + \delta_2 \omega i h_2 = \Phi_2(u, v, t, \mu) - P_2(u, v, \mu), \qquad \text{(II.5.1.6)}$$

donde:

$\delta_1 = p_1 - p_2 - 1$; $\delta_2 = p_1 - p_2 + 1$

$\Phi_1 = F - p_1 h_1 P_1 - p_2 h_1 P_2$

$\Phi_2 = -F - p_1 h_2 P_1 - p_2 h_2 P_2.$

Las soluciones del sistema (II.5.1.6) se obtienen mediante expresiones del tipo (II.2.5), (II.2.6), (II.2.7) y (II.2.8), en dependencia si responde al caso resonante o no.

Para continuar el estudio de (II.5.1.6) consideramos dos casos: trascendente y algebraico, llegándose a los siguientes resultados:

1.-) Las soluciones periódicas del sistema (II.5.1.2) son estables.

2.-) La solución nula del sistema (II.5.1.2) es asintóticamente estable.

Las soluciones periódicas del sistema (II.5.1.2) representan las oscilaciones que normalmente realiza la tensión de la corriente eléctrica en este tipo de circuito.

Si existe algún tipo de perturbación que provoca la existencia de otro tipo de trayectorias se introducen controles, caracterizados analíticamente por las ecuaciones de bifurcación, para lograr la restitución de las soluciones periódicas.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El trabajo da respuestas a las interrogantes planteadas en el estudio de equivalencia formal, equivalencia analítica y divergencia para los sistemas no autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Los resultados alcanzados extienden a los sistemas no autónomos algunos de los fundamentales resultados que se habían obtenidos en el estudio de las Formas Normales para los sistemas autónomos.

En el Capítulo I se extiende el concepto de FCNG. El cual nos permitió el estudio de un caso más general de los valores propios bajo la condición de independencia lineal de los valores propios con parte real nula y el vector $\chi \in \mathbf{Z}^L$ *con* $\chi_j = ik_j$, $k \in \mathbf{Z}$, $j=1,\ldots,L$, para los sistemas no autónomos. Se demostró la existencia de la transformación normalizante que reduce el sistema objeto de estudio a una FCNG. En el caso en que para los valores propios se satisface la condición de ausencia de divisores pequeños (condición ε) y las series de la FN contenida en la FCNG satisfacen la condición *A*, se demuestra la equivalencia analítica entre el sistema objeto de estudio y una FCNG por el método mayorante de Cauchy. Se conocía una condición suficiente de divergencia para los sistemas no autónomos con pequeño parámetro que multiplica la derivada [Ba 10], nosotros introducimos otra condición para abordar la divergencia en el caso de los sistemas no autónomos (4), esta condición era conocida para los sistemas autónomos.

Al parecer del autor lo estudiado en el Capítulo II acerca de los sistemas no autónomos con pequeño parámetro en el miembro derecho y presencia de divisores pequeños no había sido abordado con anterioridad por lo cual resulta novedoso en este contesto. Nosotros abordamos el problema imponiendo el cumplimiento de las condiciones suficientes ω y A. Atacando la demostración por el método iterativo generalizado de Newton. La metodología aquí utilizada nos permitió arribar a las conclusiones de equivalencia formal y analítica entre los sistemas no autónomos con pequeño parámetro y una FCNG en presencia de divisores pequeños. Una vez reducido el sistema inicial a una FCNG, estudiamos las soluciones periódicas, dando algunas propiedades de estabilidad de las mismas, así como su correspondiente ecuación de bifurcación.

La realización del presente trabajo nos permitió destacar las siguientes direcciones en que pueden estar dirigidas las investigaciones en el futuro:

♦Para garantizar la convergencia de la transformación normalizante, sustituir la condición de ausencia de divisores pequeños (condición ε) por la condición de Siegel, y enfrentar la demostración tanto por el método mayorante de Cauchy como por generalizado de Newton.

♦Un problema de especial interés sería probar que el no cumplimiento de la condición A es una de las causas de divergencia de la transformación normalizante.

♦Intentar extender los resultados obtenidos en la Tesis, respecto a los problemas de equivalencia formal, equivalencia analítica y divergencia a los sistemas no autónomos que tienen un pequeño parámetro como coeficiente de la derivada [Ba 10].

♦Enfrentar los algoritmos de la demostración de equivalencia analítica por el método mayorante de Cauchy y generalizado de Newton mediante técnicas computacionales.

BIBLIOGRAFÍA

[An 1] Andronov A.A.: Teoría de las Bifurcaciones de los sistemas dinámicos sobre el plano. Moscú, Nauka, 1967.

[An, Vi, Xa 2] Andronov A.A., Vitt A.A., Xaikin C.E.: Teoría de las Oscilaciones. Moscú, Nauka, 1981.

[Ar 1] Arnold.V.I.: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú, Nauka, 1978.

[Ar 2] Arnold.V.I.: Capítulos complementarios de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú, Nauka, 1978.

[Ba 1] Basov V.V.: Equivalencia formal y analítica de los sistemas reales de ecuaciones diferenciales. Ecuaciones Diferenciales, Vol XIII, No 6, junio, 1977.

[Ba 2] Basov V.V.: Convergencia de la transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales a la FNSI.VINITI, No 984-78, 1978.

[Ba, Ru, Pe 3] Basov V.V, Ruiz A.I., Pérez G.C.: Sobre la reducción de los sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos analíticos con coeficientes continuos y periódicos a la forma lineal. Revista Ciencias Matemáticas, Vol VII, Nº 3, 1986. [Ba, Ru, Ve, Be 4] Basov V.V, RuízA. I, Velazquez A y Bermudes J.: Forma Cuasi-Normal Generalizada para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Revista Ciencias Matemáticas, Vol X, No2, 1989.

[Ba, Re, Sa 5] Basov.V.V., Repilado.J.A., Saro.A.J.: Ecuación de bifurcación para los sistemas autónomos con frecuencias conmensurables dos a dos. Revista Ciencias Matemáticas, Vol IX, No1, 1989.

[Ba 6] Basov. V. V.: Divergence of normalizing transformations in the case of a real noncourse focus. Translated from Differentsialnye Uravneniya, Vol 25, No4, pp 563-573, April, 1989.

[Ba 7] Basov.V.V. On the divergence of transformationin the averaging method. Differentsialnye Uravneniya, Vol 26, No2, pp 343-345, 1990.

[Ba 8] Basov.V.V: On existence of periodical solution families for reversible of differential equations in case of multifrequency resonance.Vestnik, St. Petersburg University Mathematics,Vol 25, No1, pp 11-19, 1992.

[Ba 9]Basov. V. V.: Convergence of linearizing transformation of a nonautonomous differential equation with a small parametermultiplying the derivative. DifferentsialnyeUravneniyaVol28, No4, pp 716-718, 1992.

[Ba10]Basov.V. V.: A convergence case of linearizing transformation of a nonautonomous differential equation with a small parameter at the derivative .Vestnik St.Peterburg University Mathematics, Vol26, No2,pp 62-66,1993.

[Ba 11]Basov.V. V.: Convergence of the normalizing transformation in the critical case when tow zero roots of the characteristical equations have a nonprime elementary divisors.Russian Differential equations, No 8 (1997), 1011-1016.

[Ba 12]Basov.V. V, Bibikov.Y.N: On the stability of the equilibrium state in case of periodic perturbation of the center. Russian Differential equations, No 5 (1998), 583-586. [Ba, Bi 13] Basov. V. V, Bibikov.Y.N. Bifurcation on the equilibrium position of the system of the differential equations of the critical case of two purely imaginary and two cero roots of the characteristic equation. Differ Uravn36 (2000), No 1, 26-32.

[Bi1] Bibikov.Y.N. Local theory of nonlinear Analytic ordinary differential equations. Lectures Notes in Mathematics. New York, 1979.

[Bi 2] Bibikov.Y.N.: Curso general de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Universidad de Leningrado, 1981.

[Bi 3]Bibikov.Y.N.: Bifurcación de Hopf para movimientos cuasi-periódicos. Colloquia Mathematica. Societatis János Bolyai, 30,Vol I.Budapest, Hungary, 1981

[Bi 4]Bibikov.Y.N. Bifurcation toinvariant tori with small frequencies.Proceeding of the Eleventh International Conference on Nonlinear Oscillations, Budapest, 1987.

[Bi 5]Bibikov.Y.N. Bifurcation of invariant tori for systems with degeneration. Nauka Sibirsk. Otdel. Novosibirsk, 1988.

[Bi 6] Bibikov.Y.N. Bifurcation of a stable invariant torus from an equilibrium. Translated from Matematichesskie Zametki, Vol. 48, No 1, pp15-19, July 1990.

[Bi 7] Bibikov.Y.N. Multifrecuency nonlinear oscillations and their bifurcations. Leningrad Univ., Leningrad, 1991.

[Bi 8]Bibikov.Y.N.: Curso general de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Moscú, Nauka, 1991.

[Bi, Fu 9]Bibikov.Y.N, Fusco.G: Branching of Families of Invariant Tori for Systems with Zero Linear Part. Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXIII, pp 133-141, Italy 1993.

[Bi 10] Bibikov.Y.N: The existence of quasiperiodic motions in quasilinear systems. Appl.Maths Mechs, Vol. 59, No 1, pp. 19-26, 1995.

[Bi 11] Bibikov. Y. N.: Perservation and Bifurcation of on invariant torus of a vector field. Russian Mat Zametki (1997), No 1, 34-44.

[Bi 12] Bibikov.Y.N: Bifurcation of the generation of invariant tori with infinitesimal frequency. Algebra i Analiz10, no 2, 81-92.(1998).

[Bi 13] Bibikov.Y.N: Stabilyti and bifurcation under periodic perturbation of the equilibrium position of an oscillator with an infinitely large or small oscillation frecuency. Mat. Zametki 65 (1999), No. 323-335.

[Bre, Go 1]Brenig. L., Goriely. A.: Normal forms and Painlevé analysis in Computer Algebra and Differential equations. London Mathematical Society Lecture Notes Series. Cambridge University, Press Cambridge, 1994.

[Bre, Fai 2]Brenig. L, Fairen V.: Analytical approch to initial value problems in nonlinear systems. J. Math Phys., 22, 94, April 1981.

[Bro, Wa 1] BroerH, Wagener F.O.O.:Quasi-periodic stabily of subfamilies of an unfolded skew Hopf bifurcation. Arch.Ratin. Mech. Anal152 (2000), No4, 283-326.

[Br 1]Bruno. A. D.: The normal form of differential equations.. Dokl. Akad. Nauk, SSSR, Vol157, 1276-1279, 1964.

[Br 2]Bruno. A. D.: Divergence of transformations of Differential equations to normal Form. Soviet Math. Dokl, Vol 8, No 3, 1967.

[Br 3]Bruno. A. D.: Analytical form of differential equations. Tras. Moscow Math. Soc., Vol 25, 1971.

[Br 4]Bruno. A. D.: Analytic integral manifolds. Soviet Math. Dokl., Vol15,No 3,1974.

[Br 5]Bruno. A. D.: Integral analytic sets. Soviet Math. Dokl, Vol 16, No 1,1975.

[Br 6]Bruno. A. D.: Normal form and averaging methods. Soviet Math. Dokl, Vol 17, No 5, 1976.

[Br 7] Bruno. A. D.: Analytical integral sets.VII. Internationale Konferenz über nichtlineare Schwinguungen. Akademie- Verlag, Berlin, 1977.

[Br 8] Bruno. A. D.: Normal form in perturbation theory. Proceedings of the VIII International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1978

[Br 9]Bruno. A. D.: Método local de analisis no linear de las ecuaciones diferenciales. Moscú, Nauka, pp 3-249, 1979.

[Br 10] Bruno. A. D.: Local method of nonlinearanalysis.Singularities Banach Center Publications, Volume20, Warsaw, 1988.

[Br 11] Bruno. A, D.: Forma normal para los sistemas hamiltonianos. Exitos de las ciencias matemáticas, Vo 43, Moscú, enero-febrero, 1988.

[Br 12] Bruno. A. D.: System, similar to a normal form. Translated from Matematicheskie Zametki, Vol48, No 3, pp20-31, September, 1990.

[Br 13] Bruno. A. D.: A comparison of conditions on small divisors. Lecture at the conference "Petits Diviseurs", Ecole Polytechnique, France, 1990.

[Br 14] Bruno. A. D.: On divergence of normalizing transformation. Lecture at the seminar of J. Martinet and J.P. Ramis, Strasbourg University, France1990.

[Br 15] Bruno. A. D.: Problema acotado de los tres cuerpos. Moscú, Nauka, 1990.

[Br 16] Bruno A. D.: Divergence of the real normalizing transformation. Selecta Mathematica formerly Sovietica Vol 12, No 1, 1993.

[Br 17] Bruno. A. D.: Bifurcation ofthe periodic solutions in the symmetric case of a multiple pair of imaginary eigenvalues. Selecta Mathematica Formerly Sovietica, Vol 12, No1, 1993.

[Br,Wa 18] Bruno. A. D., Walcher. S.: Symmetries and convergence of normalizing transformatios. Journale of Mathematical analysis and applications, Vol 183, pp 571-576, 1994.

[Br 19] Bruno. A. D.: First approximations of differential equations. Russian Acad. Sci. Dokl. Math., Vol 49, No 2, 1994.

[Br 20] Bruno. A. D.: Ways of computing a normal form. Translated from Daklady Akademii Nauk, Vol 344, No 3, pp 298-300, 1995.

[Br, Sa 21]Bruno. A. D., Sadov. S.Yu: Formal integral of divergence- free system. Mathematical Notes, Vol57, No 6, 1995

[Br 22] Bruno. A. D.: Hamiltonian truncated systems of Hamiltonian system. Translated from Daklady Akademii Nauk, Vol 349, No 2, pp 153-155.1996.

[Br 23] Bruno. A. D.: Algorithms of The local nonlinear analysis. Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis, Great Briitain, 1997.

[Br 24] Bruno. A. D.: Normal Forms. Mhatematics and computer simulation, 45, pp 413-427, 1998.

[Br 25] Bruno. A. D.: Normal form. Simplification of systems of algebraic and differential equations with applications. Math. Comp. Siomulation 45(1998), No5-6,413-427.

[Br, Ed, Ste 26] Bruno. A. D, Edneral V.F, Steinber S.: Simplification of systems of algebraic and differential equations with applications.Math. Comp. Siomulation45 (1998), No5-6,409-576.

[Bu, Ne,Fu 1] Butenin N., Neimark Yu., Fufaev N.: Introducción a la teoría de las oscilaciones no lineales. Moscú, Mir,1990.

[Co 1] Colectivo de autores soviéticos: Enciclopedia Matemática. T 3, Pág 1058-1061,

[Co 2] Colectivo de autores soviéticos: Diccionario enciclopédico.

[Ch,Kl 1] Churavliov B.F., Klimov D.M.: Métodos aplicados en la teoría de las oscilaciones. Moscú, Nayka, 1988.

[Di 1] Dieudonné J.: Fundamentos de análisis moderno. Reverté, S.A., Barcelona, Buenos Aires, México, 1960.

[Fi 1] Fiztengolvz G.M.: Fundamentos del Análisis Matemático. T 2, Fizmatgiz, Moscú, 1960.

[Ga 1] Gantmacher F.R.: Teoría de matrices. Nauka, Moscú, 1988.

[Gr 1] Grebenikov E.A..: Introducción a la teoría de los sistemas resonantes. Universidad de Moscú, Moscú ,1987.

[Ku 1] Kudriazevt L.D.: Curso de Análisis Matemático. T 1, Escuela Superior, Moscú, 1981.

[Mi 1] Miguel P.: Elementos de Algebra Superior. Instituto Cubano del Libro, La Habana, 1969.

[Ot,Ru 1] Otero A.M., Ruiz A.I.: Forma cuasi-normal generalizada para sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos. Memorias de la I Conferencia Internacional de Matemática y Computación, Santiago de Cuba, Junio 1996 (publicadas en México).

[Ot,Ru 2] Otero A.M., Ruiz A.I.: Sobre el comportamiento de las trayectorias de un sistema de ecuaciones no autónomo con pequeño parámetro. Revista Integración, Vol 16, No 1, 1998.

[Ot,Ru 3] Otero A.M., Ruiz A.I.: Forma cuasi-normal generalizada para sistemas de ecuaciones diferenciales no autónomos. Revista Ciencias Matemáticas, Vol 17, No 2, 1999.

[Ot,Ru 4] Otero A.M., Ruiz A.I.: Divergencia de la transformación a la FCNG (forma cuasi-normal generelizada). Revista Ciencias Matemáticas, Vol 18, No 1, 2000.

[Ot,Ru 5] Otero A.M., Ruiz A.I.: Convergencia de la transformación que reduce la forma normal sobre superficie invariante (FNSI) a la forma cuasi-normal generalizada (FCNG) de un sistema no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Proceedings del Sexto Simposio de Matemática y Cuarta Conferencia Italo-Latinoamericana de Matemática Industrial y Aplicada (ITLA), marzo 2001.

[Ot,Ru 6] Otero A.M., Ruiz A.I.: Estudio de las trayectorias de un sistema no autónomo con pequeño parámetro. Revista Ciencias Matemáticas, Vol 19, No 1, Cuba 2001.

[Ot,Ru 7] Otero A.M., Ruiz A.I.: Analitical equivalence between the non autonomous system of differential equations with a small parameter and normal form on invariant surface (NFIS). (Revista Proyecciones, enviado)

[Ro 1] Roseau Maurice: Regimes cuasi-periodiques dans les systemes vibrants non lineairies. J. De Mathematiques peres et appliqeés, 57, pp 21-28, 1979.

[Ro,St,Ch 1] Romanovsky Y.M., Stelpanova H.B., Chernasky D.S.: Biofísica Matemática. Nauka, Moscú ,1984.

[Ru 1] Ruiz A.I..: Forma Cuasi-Normal para sistemas de ecuaciones diferenciales con m pares de valores propios imaginarios puros. Revista Ciencias Matemáticas, VolIX, No2, 1989.

[Ru 2] Ruíz A. I.: Sobre la aplicación de la teoría de las formas normales al estudio de la estabilidad del movimiento en algunos casos críticos. Revista Ciencias Matemáticas, VolX, No2 1989.La Habana.

[Ru 3] Ruiz A.I.: Tesis en opción al grado de doctor en ciencias Matemáticas. Santiago de Cuba, 1989.

[Sa 1] Salvodori.L: Generalized Hopf Bifurcation and related stability problems. Colloquia Mathematica. Societatis János Bolyai,30,Vol II. Budapest, Hungary, 1981.

[Si 1] Sibuya Y.: No-linear ordinary differential equations with periodic coeficients. Funkc ekvacioj, 1, pp 77-132, 1958.

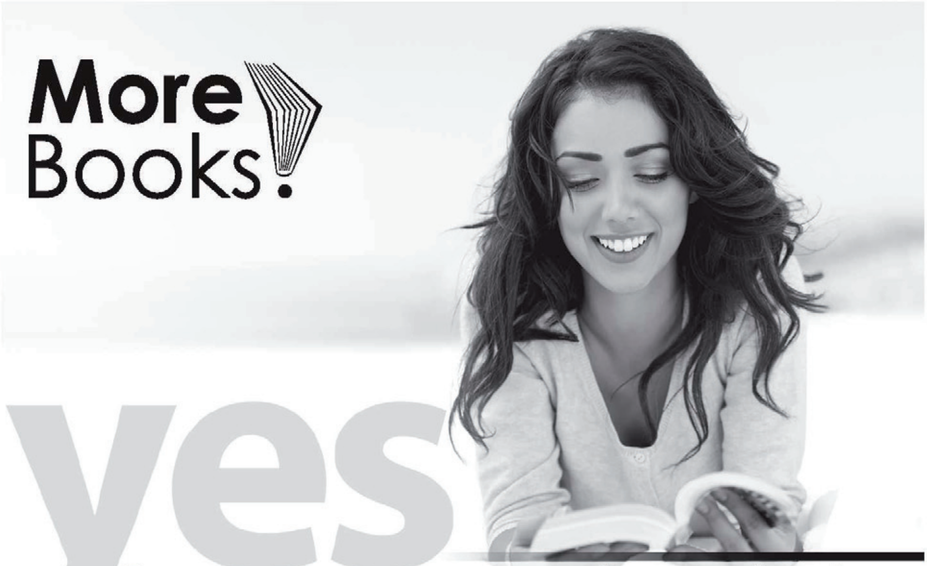
[Si 2] Sibuya Y.: Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 9, No 3, pp 368-398, 1960.

[St 1] Starzhinskii. V. M.: Applied methods in the theory on nonlinear oscillations. Tr. From the Russian, pp 103-207. Moscow, Mir, 1980.

[Wa 1] Walcher S.: On Poincaré problem. J.Differential Equations166 (2000), No 1, 51-78.

[Wa 2] Walcher S.: On convergence normal form Transformation in presence of Simmetries.. J. Math Anal. Appl. 244 (2000), No 1, 17-26.

[Zi 1] Zimka R.: Sobre la existencia de la transformación suave de sistemas de ecuaciones diferenciales a la Forma Cuasi-Normal. Ecuaciones Diferenciales. Instituto de Matemática de la Academia de Ciencias de la URSS. Año 1977.



yes I want morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at

www.get-morebooks.com

¡Compre sus libros rápido y directo en internet, en una de las librerías en línea con mayor crecimiento en el mundo! Producción que protege el medio ambiente a través de las tecnologías de impresión bajo demanda.

Compre sus libros online en

www.morebooks.es

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscriptum.com
www.omniscriptum.com

OMNIScriptum