Construcción de Identidades MEMO

Construction of MEMO Identities

Marco Vinicio Vásquez Bernal

Revista de Investigación

G.I.E Pensamient Matemátic MAIC

Volumen VI, Número 1, pp. 041–054, ISSN 2174-0410
Recepción: 10 Nov'15; Aceptación: 1 Mar'16

1 de abril de 2016

Resumen

Este trabajo demuestra objetivamente la relación existente entre el factorial de un número natural y la sumatoria de varias potencias que tienen como exponente ese número, estando estos afectados por coeficientes iguales a los elementos del triángulo de Pascal, generando unas igualdades a las que llamaremos IDENTIDADES MEMO, en otro caso estas identidades MEMO dan como resultado cero, o el factorial de un número, planteando insumos importantes para establecer relaciones matemáticas.

Esta investigación surge de hechos simples, como las diferencias sucesivas de potencias de los números naturales, un estudio de estas relaciones permite obtener algunos resultados que valen la pena ser mostrados.

El resultado de este trabajo, en su relativa importancia, lo dedico a la memoria de mi padre, Miguel Guillermo Vásquez Quinteros.

Palabras Clave: Factorial, Potencia, Identidad, Identidades MEMO.

Abstract

This paper shows objectively the relationship between the factorial of a natural number and the sum of several powers whose exponents are that number. These exponents are affected by coefficients that are equal to the elements of Pascal's triangle, generating interesting equalities that I call MEMO IDENTITIES, that give zero or the factorial of a natural number as result, raising important inputs to establish mathematical relationships.

This research arises from simple facts, as the successive differences of powers of natural numbers. A study of these relationships shows results that are worth being shown.

The result of this work, in its relative importance, is dedicated to the memory of my father, Miguel Guillermo Vásquez Quinteros.

Keywords: Factorial, Powers, Identity, MEMO Identities.

1. Introducción

Los números naturales han sido desde siempre una fuente de investigación, sus interrelaciones intrincadas y curiosas generaran más de una sorpresa, sus algoritmos secretos obligan a los buscadores a crear procesos de todo calibre para lograr descubrir esa verdad que hace maravillosa a las matemáticas.

Tabla 1. Diferencias sucesivas de los cuadrados de los enteros sucesivos.

Número (n)	n^2	1ª Diferencia	2ª Diferencia	3ª Diferencia
1	1			
2	4	3		
3	9	5	2	
4	16	7	2	0
5	25	9	2	0
6	36	11	2	0
7	49	13	2	0
8	64	15	2	0
9	81	17	2	0
10	100	19	2	0
...	...	...	...	...

Tabla 2. Diferencias sucesivas de los cubos de enteros consecutivos.

Número (n)	n^3	1ª Diferencia	2ª Diferencia	3ª Diferencia	4ª Diferencia
1	1				
2	8	7			
3	27	19	12		
4	64	37	18	6	
5	125	61	24	6	
6	216	91	30	6	0
7	343	127	36	6	0
8	512	169	42	6	0
9	729	217	48	6	0
10	1000	271	54	6	0
...	...	...	...	...	...

En este caso trabajaré un modelo matemático que relaciona el factorial de un número con potencias cuyo exponente es a la vez ese mismo número. Esta investigación surge de un encuentro casual, que se dio gracias a las tablas de excel, donde se ubicaron de forma ordenada las potencias de los números naturales, y se observó que al realizar diferencias sucesivas, siempre se llegaba a una constante y luego a ceros, así si tomamos ordenadamente los números naturales al cuadrado y realizamos dos diferencias sucesivas, el resultado es el 2, por consiguiente, las diferencias posteriores serán siempre cero (Tabla 1). Luego construimos algo similar para los cubos de los enteros sucesivos, en este caso la constante 6 asoma en la tercera diferencia sucesiva, luego de la cual los resultados son ceros (Tabla 2).

Buscando una generalidad construí algo similar para la potencia 8, obteniendo que la constante asoma en la octava diferencia sucesiva, esta es 40320 (Tabla 3).

Revisando la bibliografía, se observa que Philippe Deléham en el 2004 en su trabajo presenta una relación entre el factorial de un número y la suma de enteros consecutivos elevados a un

Tabla 3. Diferencias sucesivas de potencias octavas de enteros consecutivos.

Número (n)	n^8	1ª Diferencia	2ª Diferencia	3ª Diferencia	4ª Diferencia	5ªDiferencia	6ª Diferencia	7ª Diferencia	8ª Diferencia	9ª Diferencia
1	1									
2	256	255								
3	6561	6305	6050							
4	65536	58975	52670	46620						
5	390625	325089	266114	213444	166824					
6	1679616	1288991	963902	697788	484344	317520				
7	5764801	4085185	2796194	1832292	1134504	650160	332640			
8	16777216	11012415	6927230	4131036	2298744	1164240	514080	181440		
9	43046721	26269505	15257090	8329860	4198824	1900080	735840	221760	40320	
10	100000000	56953279	30683774	15426684	7096824	2898000	997920	262080	40320	0
11	214358881	114358881	57405602	26721828	11295144	4198320	1300320	302400	40320	0
11	214358881	114358881	57405602	26721828	11295144	4198320	1300320	302400	40320	0
12	429981696	215622815	101263934	43858332	17136504	5841360	1643040	342720	40320	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

mismo exponente, luego Bryan Jacobs en el 2005, afirmo que el factorial de un número es la n-ésima diferencia sucesiva de las potencias de exponente n de números cuyas bases son enteros consecutivos, en nuestro caso profundizaremos estos resultados para establecer igualdades particularmente interesantes partiendo de una demostración formal de las mismas, ya que es allí donde se originan las condiciones para las igualdades mencionadas.

De estas tablas y de otros trabajados en la hoja de cálculo, se puede aseverar que existen las siguientes coincidencias:

- El número de diferencias sucesivas que se requieren para alcanzar un valor constante entre las potencias de enteros consecutivas es siempre igual al valor de esa potencia.
- El polinomio que va construyéndose con las diferencias sucesivas tiene los mismos coeficientes que la respectiva fila del triángulo de Pascal, con los signos alternados, iniciando en positivo para potencia par y en negativo para potencia impar.
- La constante a la que se llega coincide con el factorial de la potencia presente (en los casos expuestos, $2! = 2$, $3! = 6$ y $8! = 40320$)
- Indiferente de qué valor inician los enteros consecutivos, el resultado es el mismo.

2. Modelo Propuesto

En base de estas coincidencias me permito presentar el siguiente modelo matemático que explique este hecho:

$$n! = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n$$

Identidad muy parecida a la presentada por S. Ruiz, en su artículo *"An Algebraic Identity Leading to Wilson's Theorem"*, publicado en 1996.

Con $n, i \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$.

Indicando que para este trabajo, convendremos las siguientes definiciones, $0 \in \mathbb{N}$ y $0^0 = 1$.

Expresión curiosa que relaciona el factorial de un número cualquiera con las potencias de enteros consecutivos, sin importar donde estos inician.

2.1. Marco Teórico

Para iniciar la demostración formal de esta expresión, recordaremos algunas definiciones.

Factorial de un número: Para los números enteros positivos se define su factorial, como el producto de todos los enteros consecutivos, desde 1 hasta el número indicado, se representa con el signo !.

NOTA: $0! = 1$.

Fórmula de Stirling: El Matemático Stirling demostró la aproximación:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{n^k} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \cdots\right)$$

Donde los a_k se denominan coeficientes de Stirling y se calculan con la fórmula:

$$a_k = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \sum_{i=0}^{2k} \binom{k+i-\frac{1}{2}}{i} \binom{3k+\frac{1}{2}}{2k-i} 2^i \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{(-1)^j}{(2k+i+j)!} \sum_{l=0}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} (j-l)^{2k+i+j}$$

Muy utilizada en estadística, que facilita el cálculo del factorial de un número cuando este es significativamente grande.

Potencia de un número: es una operación básica de las matemáticas que se presenta a^n, donde a se conoce como base y n como exponente, la operación de potencia consiste en multiplicar la base a, por sí misma, tantas veces como indica el exponente n.

Triángulo de Pascal: Es una estructura construida por el matemático Blaise Pascal (1623-1662), que mediante sumas de elementos consecutivos, permite establecer los coeficientes que forman parte del desarrollo de un binomio a cualquier potencia.

Coeficiente Binomial: Resultado numérico de gran ayuda en algunas ramas de las matemáticas, se presenta de la siguiente forma y se calcula de la siguiente manera:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)i!}$$

Binomio de Newton: Consiste en un desarrollo de sumas sucesivas de potencias que permiten, en base de los coeficientes binomiales calcular la potencia de un binomio cualesquiera, su fórmula general es:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{(n-k)}$$

Demostración por inducción: Procedimiento formal de demostración matemático que permite demostrar una expresión induciendo sobre una variable entera, sigue los siguientes pasos:

1. Se demuestra la validez de la expresión para los menores valores de la variable sobre la que se realizará la inducción.

2. Se supone verdad la expresión cuando la variable toma un valor numérico fijo desconocido, con esto como base (hipótesis de inducción, H.I.) se demuestra para el valor consecutivo mayor de la variable, si esto es posible, se afirma que la expresión es válida para todos los posibles valores de la variable, en consecuencia la expresión representa un modelo matemático válido.

3. Desarrollo

TEOREMA: si $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Se cumple que: $n! = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (p+k)^n$.

Para demostrar el modelo matemático presentado, utilizaremos el método de demostración por inducción. En primer lugar demostraremos que:

PROPOSICIÓN 1: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k+p)^m = 0, \forall n, k \in \mathbb{N}$ siempre que $m < n, p \in \mathbb{R}$.

Demostraremos esta proposición mediante inducción sobre el índice m.

En primer lugar veamos que sucede si $k = 0$, como i toma el valor inicial en 0, el primer término tiene el factor 0^0 , que como habíamos convenido es igual a 1, si $p = 0$, se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^0 = 1$$

Y la expresión con $p \neq 0$ sería:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k, \text{ con } p \neq 0, p \in \mathbb{R}$$

Además como cualquier número real elevado a la cero es 1 se tendrá:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (1)$$

Y como 1 a cualquier potencia es 1, podemos afirmar que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1)^{n-i} (-1)^i$$

Que en base del desarrollo de la potencia de un binomio tenemos:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1)^{n-i} (-1)^i = (1-1)^n = 0^n = 0$$

Ya que n es un entero mayor o igual a 0.

Como hipótesis de inducción supongamos ahora que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k = 0, \forall n, k \in \mathbb{N}, \text{ siempre que } k < n, p \in \mathbb{R}$$

En segundo lugar demostremos ahora que esta igualdad se cumple si aumentamos k a $k+1$, siempre que $k+1 < n$.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^{k+1} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left((i+p)^{k+1} - (i+p)^k \right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k (i+p-1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k (i) + (p-1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k$$

Por hipótesis de inducción, $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k = 0$.

Por tanto, $(p-1) \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^k = 0$.

Luego, $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k i=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k i.$

Ya que se elimina el primer término del sumatorio, cuando $i=0$.

Ahora:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k(i)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}(i+p)^k(i)=$$
$$=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(i+p)^k$$

Pero,

$$n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(i+p)^k=n\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}(i+p)^k$$

Aquí realizamos el cambio de variable, $j=i-1$, y se tendrá:

$$n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j+1}\binom{n-1}{j}(j+1+p)^{(k)}=-n\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}(j+1+p)^k$$

Recordando que $k+1<n$, entonces $k<n-1$, además $1+p$ es un número real y $n-1$ es un número natural positivo, consecuentemente por hipótesis de inducción:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^{k+1}-\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k=0$$

Pero como $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k=0$, por la hipótesis de inducción, entonces:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^{k+1}=0 \qquad \square$$

Por tanto $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(i+p)^k=0, \forall n,k\in\mathbb{N}, p\in\mathbb{R},$ y $n,k\neq 0, k<n.$

A esta expresión la denominaremos RESULTADO 1.

Ahora recordemos que el teorema a demostrar es:

$$n!=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{i}(p+i)^n$$

donde $n,i\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}$, $n\neq 0$.

Haciendo un análisis breve de la expresión, vemos que p representa el número menor de donde arrancan las potencias, i es un índice que toma valores entre 0 y n y establece los respectivos sumandos, por tanto es n la variable fundamental de esta expresión, por tanto la inducción la realizaremos sobre esta.

En primer lugar veamos entonces qué sucede con los valores mínimos de n.

1. Si $n=1$, tendríamos:

$$1!=(-1)^1\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{n}{i}(p+i)^1$$

Que genera los dos sumandos:

$$1! = (-1)^1\left((-1)^0\binom{1}{0}(p+0)^1 + (-1)^1\binom{1}{1}(p+1)^1\right)$$

Es decir,

$$1! = (-1)\left((p+0)+(-1)(p+1)\right) = (-1)(p-p-1) = 1$$

Cumpliendo la definición de factorial.

2. Si $n = 2$, se tendría:

$$2! = (-1)^2\sum_{i=0}^{2}(-1)^i\binom{2}{i}(p+i)^2$$

$$2! = (-1)^2\left((-1)^0\binom{2}{0}(p+0)^2 + (-1)^1\binom{2}{1}(p+1)^2 + (-1)^2\binom{2}{2}(p+2)^2\right)$$

$$2! = (-1)^2\left((1)(p)^2 + (-1)(2)(p+1)^2 + (1)(p+2)^2\right)$$

$$2! = \left((p)^2 - 2(p+1)^2 + (p+2)^2\right)$$

$$2! = (p^2 - 2p^2 - 4p - 2 + p^2 + 4p + 4) = 2$$

También cumple la definición de factorial.

La certeza de que el modelo cumple de manera absoluta para $n = 1$ y $n = 2$, permite tomar esto como hipótesis de partida para intentar generalizar para cualquier n.

Mas para efectos de una demostración plena, primero intentaremos demostrar la expresión:

$$n! = (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}i^n$$

donde $n, i \in \mathbb{N}$, es decir un caso particular cuando $p = 0$.

En segundo lugar, cumpliendo nuevamente el proceso de inducción, suponemos que la expresión anterior es verdad para $n = k$.

Es decir, $k! = (-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}i^k$.

Asumiendo que esta expresión es verdad, veamos que sucede para un valor de $k+1$, es decir intentaremos probar la veracidad de la expresión:

$$(k+1)! = (-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}i^{k+1}$$

Sabemos que:

$$(-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}(i)^{k+1} = (-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}i^{k+1}$$

El término que corresponde a $i = 0$ se anula.

Ahora hacemos el cambio de variable $j = i - 1$ y remplazamos en la expresión

$$(-1)^{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i\binom{k+1}{i}i^{k+1} = (-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k+1}{j+1}(j+1)^{k+1}$$

Por definición del coeficiente binomial,

$$(-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\binom{k+1}{j+1}(j+1)^{k+1} = (-1)^{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\frac{(k+1)!}{(j+1)!(k-j)!}(j+1)^{k+1}$$

que se simplifica en:

$$(-1)^{k+2}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\frac{(k+1)!}{j!(k-j)!}(j+1)^{k+1}$$

Expresión que extrayendo el factor $(k+1)$ y utilizando la definición de coeficiente binomial:

$$(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\frac{(k+1)k!}{j!(k-j)!}(j+1)^{k} = (k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\frac{k!}{j!(k-j)!}(j+1)^{k} =$$

$$= k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(j+1)^{k}$$

Utilizamos el desarrollo del binomio:

$$(k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}(j+1)^{k} = (k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}j^{k-h}1^{h}$$

Reordenando los sumatorios, por la propiedad distributiva de los términos:

$$(k+1)(-1)^{k}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k-h}$$

pero como $p=0$ del RESULTADO 1, se obtiene que

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k-h} = 0$$

Cuando $k-h<k$, es decir se anulan todos los términos, excepto cuando $h=0$.

$$(k+1)(-1)^{k}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k-h} = (k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k}$$

Recordando la hipótesis de inducción:

$$k! = (-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k}$$

entonces,

$$(k+1)(-1)^{k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}j^{k} = (k+1)k! = (k+1)!$$

Se puede concluir que:

$$(-1)^{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{i}\binom{k+1}{i}i^{k+1} = (k+1)!$$

Por tanto hemos demostrado que:

$$n! = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n$$

donde $n, i \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Para concluir veamos qué sucede con esta expresión cuando a la base de la potencia presente dentro del sumatorio, le aumentamos un valor p real.

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^n$$

Para trabajar esto lo que haremos será sustraer de esta expresión un valor conocido e igual a $n!$.

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^n - (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left((i+p)^n - i^n\right) =$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} (p)^j - i^n \right) =$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(i^n + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} p^j - i^n \right) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} i^{n-j} p^j$$

que reordenando puede escribirse:

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (p)^j \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i i^{n-j}$$

Nuevamente del RESULTADO 1, sabemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^{n-j} = 0$$

entonces la suma de todos esos términos es también 0, por lo tanto:

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n} p^j \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^{n-j} = 0$$

Entonces:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^n - (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n = 0$$

Y como:

$$n! = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^n$$

Reemplazando:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^n - n! = 0$$

Por tanto:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (i+p)^n = n!$$

que demuestra el teorema planteado, para $i, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$.

COROLARIO 1: Para $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq q$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se cumple que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{n-1} (p+i)^j (q+i)^{n-j} = 0$$

Veamos la demostración.

Aplicamos el teorema demostrado para dos valores reales de p y q, resultando entonces:

$$n! = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n$$

$$n! = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (q+i)^n$$

Por lo tanto ambas expresiones son idénticas:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (q+i)^n$$

de donde se tiene que:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n - (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (q+i)^n = 0$$

$$(-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left((p+i)^n - (q+i)^n \right) \right) = 0$$

Por diferencia de potencias:

$$(-1)^n \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left((p+i) - (q+i) \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} (i+p)^j (i+q)^{n-j} \right) \right) = 0$$

$$(-1)^n (p-q) \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (p+i)^j (q+i)^{n-j} \right) \right) = 0$$

Como p y q son reales distintos, $p-q$ no es cero, y $(-1)^i$ también es distinto de cero.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (p+i)^j (q+i)^{n-j} \right) = 0$$

Si p y q con iguales, se tiene entonces lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (p+i)^j (q+i)^{n-j} \right) = n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n$$

que remplazando los resultados obtenidos es igual a $n!$.

Veamos la demostración.

Del teorema demostrado se tiene que:

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n = n!$$

COROLARIO 2: Para $p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se cumple que:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i)^n}{i!(n-i)!} = (-1)^n$$

Reemplazando el coeficiente binomial,

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} (p+i)^n = n!$$

Mas como $n!$ es factor común en los términos del primer miembro, entonces

$$n!(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i)^n}{i!(n-i)!} = n! \Rightarrow (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i)^n}{i!(n-i)!} = 1$$

y en consecuencia:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{(p+i)^n}{i!(n-1)!} = (-1)^n \qquad \square$$

COROLARIO 3: Para $p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, se cumple que:

$$p^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (p+i)^n$$

Su demostración es una consecuencia directa del RESULTADO 1, simplemente se separa de la sumatoria el primer término.

4. Generación de las identidades MEMO

Definiremos las ecuaciones MEMO, como aquellas demostradas en el presente artículo, que se construyen utilizando los coeficientes del binomio de Newton o del triángulo de Pascal.

Se tiene de dos tipos:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, siempre que $p \in \mathbb{R}$ y $n \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^n = n!$$

2. $\forall n, k \in \mathbb{N}$, siempre que $p \in \mathbb{R}$, $k < n$ y $n, k \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (p+i)^k = 0$$

Con las identidades MEMO, es posible construir expresiones matemáticas diversas.

5. Conclusiones

El teorema demostrado en este trabajo, es un resultado netamente de matemáticas puras, donde surgen las identidades MEMO, que abren campos interesantes para trabajar en matemáticas, planteando un hecho significativamente importante, el cálculo de cada término tiene inicio en un número real cualesquiera, más este no influye en el resultado.

El modelo matemático que surge del teorema relaciona la suma de potencias con un mismo exponente con un número factorial, hecho muy importante, ya que muestra algo no usual.

La segunda forma de las identidades MEMO evidencian una relación especial entre los elementos del triángulo de Pascal y unas potencias relacionadas.

Referencias

[1] APOSTOL, T. M. *Calculus, Vol. I.* Ed. Reverte S.A, 2ª Ed., Barcelona, 1978.

[2] BOUTROUX, P. *L'Ideal Scienti que des Mathematiciens, dans l'Antiquiteet dansles Temps Modernes*, Paris, 1920.

[3] CASALDERREY, F. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el renacimiento italiano*, Nivola, Madrid, 2000.

[4] COLLETTE, J. P. *Historia de las Matemáticas*. Ed. Siglo XXI Editores, 2ª Ed., México, 1986.

[5] PASCAL, B. *Pensees*, Editions Garnier, Paris, 1957.

[6] RUIZ, S. *"An Algebraic Identity Leading to Wilson's Theorem"*. Math. Gaz. 80, pp. 579-582, Nov. 1996.

[7] USPENSKI. V. A. *Triangulo de Pascal*, trad. L. B. Ermolaev, Editorial MIR, Moscú, 1978.

[8] SMITH, STANLEY, A. (et al). *Algebra, Trigonometría y Geometría Analítica*. Ed. Pearson Educación, 1ª Ed., México, 1998.

Sobre el autor:
Nombre: Marco Vinicio Vásquez Bernal
Correo electrónico: marco.vasquez@unae.edu.ec
Institución: Universidad Nacional de Educación (UNAE), Azoguez, Ecuador.