



<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

TRABAJANDO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON ESTRELLAS DE SEIS PUNTAS

Working on systems of linear equation with six points stars

MARCO VINICIO VÁSQUEZ BERNAL¹

Recibido:09 de diciembre de 2017. Aceptado:23 de diciembre de 2017

DOI: <http://dx.doi.org/10.21017/rimci.2018.v5.n9.a44>

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas tiene sus peculiaridades, cada vez el docente debe esforzarse por crear nuevas herramientas y procesos que despierten el interés de los estudiantes, innovando y proponiendo nuevas formas que permitan que el aula sea un espacio de comunicación armónico donde el conocimiento surge.

Este trabajo se ha planteado para desarrollar una temática de las matemáticas, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, presentándolas como una herramienta para resolver desafíos simples, lo que a simple vista se presenta es la imagen agradable de las estrellas de seis puntas, para mediante reflexión de su estructura establecer relaciones numéricas.

A lo largo de esta investigación está presente el criterio de equilibrio y armonía a pesar de la diversidad, es decir con números diferentes se puede llegar a un equilibrio, conceptos de pertenencia, no pertenecía, equivalencia y contradicción son manejados como conceptos a pesar de no mencionarse, se intenta que el individuo los utilice sin detenerse en discusiones sobre el concepto.

Esta investigación es parte de una propuesta didáctica que la desarrollamos en la UNAE de Ecuador, la primera parte de este trabajo se publicó en esta misma revista en el 2015 [1].

Palabras clave: Sistemas lineales, ecuaciones, equilibrio, estrellas de seis puntas.

ABSTRACT

The teaching of mathematics has its peculiarities, each time the teacher must strive to create new tools and processes that arouse the interest of students, innovating and proposing new ways that allow the classroom to be a space of harmonious communication where knowledge arises

This research has been proposed to develop mathematical topics, the resolution of systems of linear equations, presenting them as a tool to solve simple challenges, what at first sight is presented is the pleasant image of the six-pointed stars, for reflection of its structure to establish numerical relationships.

Throughout this research, the criterion of balance and harmony is present despite diversity, that is, with different numbers it is possible to reach a balance, concepts of belonging, not belonging, equivalence and contradiction are handled as concepts despite not be mentioned, it is intended that the individual use them without stopping in discussions about the concept.

This research is part of a didactic proposal that we developed in the UNAE of Ecuador. The first part of this work was published in this same magazine in 2015 [1].

Keywords: Linear systems, equations, equilibrium, six-pointed stars.

¹ Matemático, mención estadística. Magister en Gerencia Empresarial (MBA). Magister en Investigación para el Desarrollo Educativo. Diplomado Superior en Práctica Docente Universitaria y Especialista en Educación Universitaria. Actualmente, catedrático de la UNAE (Universidad Nacional de Educación de Ecuador). Miembro del Consejo editorial de la UNAE. Miembro del Consejo Editorial de la revista

Mamakuna. Delegado Embajador de Ecuador en el Parlamento Internacional de Educación. Columnista de El Heraldo del Cañar y de Ecuadoruniversitario.com. Correo electrónico: marco.vasquez@unae.edu.ec

I. INTRODUCCIÓN

TAL VEZ esta es la estrella mas común, ligada incluso a algunos hechos de la historia humana, llegando incluso a atribuirle poderes. Geométricamente resulta de dividir el círculo en seis partes, concepto similar a la definición de radian, y su construcción es el resultado de sobreponer dos triángulos equiláteros.

En este caso, como se observa en la Fig. 1, la estrella mágica contiene:

- 6 Segmentos.
- 6 vértices.
- 6 cortes.

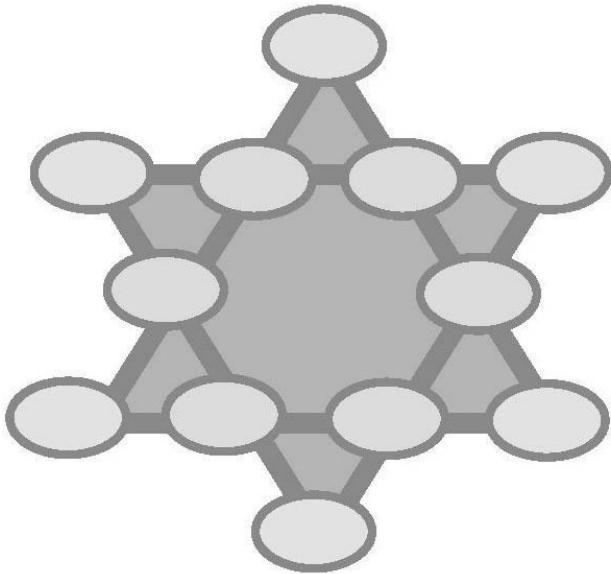


Fig. 1. Estrella Mágica.

- Tenemos entonces que la estrella esta compuesta de 12 elementos.
- En cada segmento estarán cuatro elementos.
- Cada elemento, simultáneamente forma parte de dos segmentos.
- Cada segmento se corta con otros cuatro y no se corta con uno.

II. ESTRELLAS MÁGICAS CON ELEMENTOS QUE FORMAN SERIES ARITMETICAS

Recordando las propiedades de las estrellas mágicas se indicará la forma de construir una es-trella mágica con los primeros 12 enteros positivos, es decir se trabajará con el conjunto:

$$[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12]$$

Que obviamente forman una serie aritmética, cuya razón es 1.

Primero se calcula cuanto suman todos estos elementos, utilizando la siguiente formula [2]:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Con $n = 12$, el resultado de la sumatoria tendremos $12 \times 13 / 2 = 78$.

Se sabe que cada uno de los elementos esta presente en dos segmentos, entonces la suma total será el doble, esto es 156.

Existen seis segmentos, donde todos deben sumar una misma cantidad, entonces cada segmento debe sumar veinte y seis ($156 / 6 = 26$).

A continuación en la Tabla I, se indicarán las 33 combinaciones de cuatro elementos cuya sumatoria es 26.

Deberemos escoger seis de ellas que cumplan las condiciones indicadas, que contengan en dos de ellas a cada uno de los doce números, que cada uno tenga un elemento común con cuatro de las demás, y que no tenga elemento en común con la otra.

Tomemos para iniciar la combinación 4, en relación a esta:

- Combinación 7 tiene en común el elemento 1.
- Combinación 19 tiene en común el elemento 10.
- Combinación 25 tiene en común el elemento 11.
- Combinación 30 tiene en común el elemento 4, y
- Combinación 11 no tiene elementos en común.

Tabla I. 33 combinaciones.

Combinaciones				
1	1	2	11	12
2	1	3	10	12
3	1	4	9	12
4	1	4	10	11
5	1	5	8	12
6	1	5	9	11
7	1	6	7	12
8	1	6	8	11
9	1	6	9	10
10	1	7	8	10
11	2	3	9	12
12	2	3	10	11
13	2	4	8	12
14	2	4	9	11
15	2	5	7	12
16	2	5	8	11
17	2	5	9	10
18	2	6	7	11
19	2	6	8	10
20	2	7	8	9
21	3	4	7	12
22	3	4	8	11
23	3	4	9	10
24	3	5	6	12
25	3	5	7	11
26	3	5	8	10
27	3	6	7	10
28	3	6	8	9
29	4	5	6	11
30	4	5	7	10
31	4	5	8	9
32	4	6	7	9
33	5	6	7	8

Tomando cada una de estas combinaciones podremos construir una estrella mágica de seis puntas, siguiendo los siguientes procesos:

1. Tomemos la combinación 4, de este escojamos el elemento 1 y ubiquemos este en un vértice.

La Fig. 2, muestra una estrella mágica donde los elementos de cada segmento suman 26, por lo indicado anteriormente.

En ningún caso esta es la única, pero nos sirve para poder analizar y generar otras, esta vez tomaremos en cuenta algunas consideraciones:

- Existen 33 combinaciones de cuatro números distintos del 1 al 12,
- Cada número está presente de 10 a 12 veces en las combinaciones.

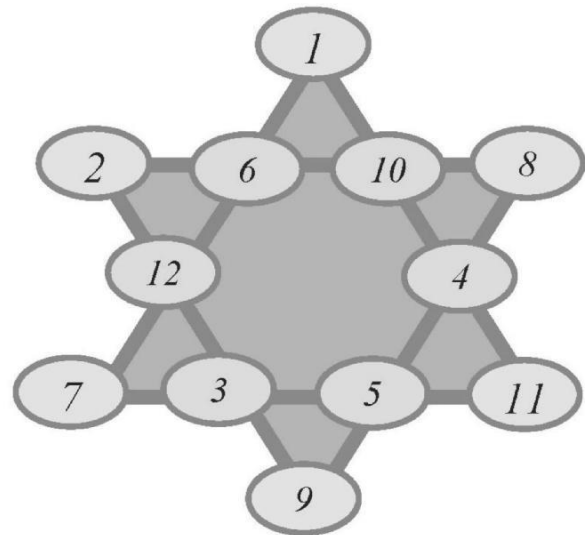


Fig. 2. Estrella Mágica—Elementos de cada segmento suman 26.

- Cada estrella mágica tiene seis segmentos.
- Cada número debe estar presente en dos de esos segmentos.
- En cada par de segmentos puede haber máximo un elemento en común.
- Todos los números deben estar presentes como elementos de la estrella.

Además debemos tomar en cuenta que si estudiamos de forma completa para un número, obtendremos todos los resultados posibles y no será necesario realizar el estudio para otro número.

Por lo indicado anteriormente, en la Tabla II, realizaremos un estudio para el número uno.

Iniciaremos recordando las diez combinaciones donde está presente el número uno, que enumeradas son:

Tabla II. Combinaciones que contienen el número 1.

A	1	2	11	12
B	1	3	10	12
C	1	4	9	12
D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
H	1	6	8	11
I	1	6	9	10
j	1	7	8	10

Con base a las condiciones dadas, escogeremos pares de esta, que tengan en común únicamente el número 1.

Esto se da entre las combinaciones A e I, A y J, B y F, B y H, C y H, C y J, D y E, D y G, E e I, E e I, F y G; y, F y J, es decir existen 11 posibilidades.

A continuación estudiaremos cada uno de los casos, respetando el orden expuesto anteriormente.

Así tomaremos el caso entre las combinaciones A y D, el procedimiento a seguir será el siguiente [3]:

1. Luego de establecer las dos combinaciones, para la tercera buscaremos una que contenga un elemento de cada una de las combinaciones presentes y dos números distintos a los presentes en las dos combinaciones.
2. En las tres combinaciones estarán presentes nueve números, es decir tres no están en las indicadas.
3. De los tres que no están presentes, escogemos dos y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos cada una presente en una única combinación de las anteriores.
4. Tomaremos un número de los dos que tomamos de base para la anterior combinación, tomamos el tercer elemento que aún no ha sido considerado y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos, cada una presente en una única combinación de las anteriores.
5. Tomamos el otro número que no fue considerada en la combinación anterior, tomamos también el tercer número que ya fue considerado en la combinación anterior y buscamos una combinación que las contenga y además tenga dos, cada una presente en una única combinación de las anteriores.
6. Con ello tomamos las seis combinaciones que constituyen la base matemática para construir la estrella mágica.

Aplicando lo indicado, seleccionamos las combinaciones A e I, ver Tabla III, que tienen en

Tabla III. Combinaciones A – I Alternativa 1

A	1	2	11	12
I	1	6	9	10
	2	9	7	8
	3	4	8	11
	3	5	6	12
	4	5	7	10

común, únicamente, el número 1, la tercera combinación la construimos tomando el 2 y el 9, que suman 11, escogeremos dos números que no estén en las combinaciones y cuya suma sea 15, en vista de que toda combinación debe sumar veinte y seis (26), escogemos el 7 y el 8.

Hasta allí tenemos tres combinaciones donde no están considerados ni el 3, ni el 4 ni el 5. Para la cuarta combinación colocamos el 3 y el 4, que suman 7, debemos escoger dos números que cada uno esté en una combinación distinta y sumen 19, escogemos el 8 y el 11 que están en las combinaciones primera y tercera respectivamente, para la quinta combinación tomamos otra vez el 3 y el otro valor que aún no ha sido considerado, el 5, entre los dos suman 8, escogemos dos números que sumen 18, escogemos el 6 y el 12 que están en las combinaciones primera y segunda respectivamente. Para la última combinación tomamos los dos números que fueron ya relacionados con el 3, que suman 9, escogemos dos números que sumen 17, escogemos el 7 y el 10 que están únicamente en la segunda y tercera combinación en su orden.

Luego del proceso indicado tenemos seis combinaciones, donde cada número está en dos de ellas, y cada par de combinaciones tienen a lo mucho un elemento en común, con este resultado podemos construir la estrella mágica [4] que se observa en la Fig. 3.

Para la construcción de la estrella simplemente ubicaremos los elementos, así en cada segmento, se ubicarán los elementos de cada combinación construida, deberemos tener en cuenta los elementos de cada intersección [5].

Se sugiere seguir el siguiente proceso:

- a. Colocar el uno en un vértice (ubicamos 1),

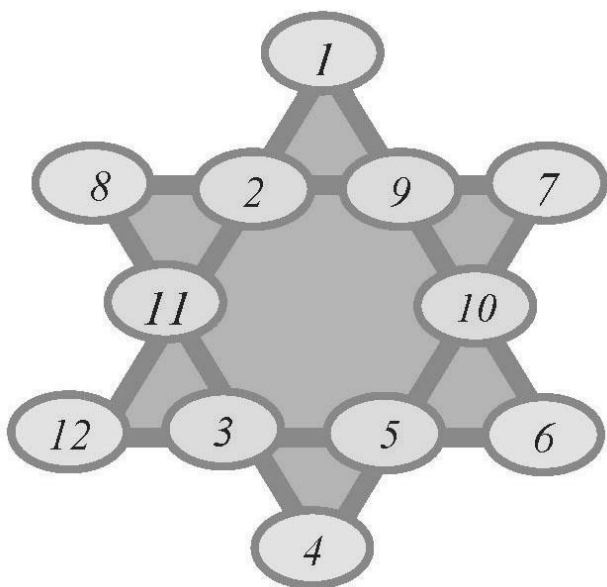


Fig. 3. Estrella Mágica – Base 2 y 9

- b. Luego colocar los elementos diferentes de las dos primeras combinaciones que permitieron construir la tercera (colocamos 2 y 9).
- c. Escogemos luego un elemento restante de la tercera combinación y lo ubicamos en un vértice, cuidando que se ubique junto al valor, con el cual coincida otro elemento en otra combinación, (8 junto al 2 ya que entre las combinaciones (1,2,11,12) y (8,11,3,4) coincide el 11, que será el otro).
- d. Ese otro valor colocara en el siguiente corte (ubicamos el 11).
- e. Llenaremos los dos segmentos, ubicando en los vértices, los números faltantes en las combinaciones (12 en el un segmento y 7 en el otro).
- f. Para los otros cortes buscaremos los elementos coincidentes en las combinaciones hasta llenar la estrella mágica (así entre el segmento de vértice 8 y el otro de vértice 12 colocaremos el 3, entre el segmento de vértice 7 y el otro de vértice 1, colocamos el 10 que es coincidente en las combinaciones, luego ubicamos otro corte entre el segmento de vértice 12 y el otro de vértice 7 ubicamos el cinco).
- g. Completamos otro segmento, colocando un vértice (en el ejemplo el 6).

h. Ubicaremos el último corte, por eliminación o tomando en cuenta los elementos de las combinaciones (colocamos el 10).

Con esto tenemos integrada la estrella mágica.

Esta claro que con las dos combinaciones seleccionadas, es posible obtener más de una estrella mágica, en la Tabla IV se observa otra posibilidad que se da si tomamos como base el seis y el once, y se genera la estrella mágica de la Fig. 4, además se tiene otra posibilidad la Tabla V y la Fig. 5.

Tabla IV. Combinaciones A-I Alternativa 2

A	1	2	11	12
I	1	6	9	10
	6	11	4	5
	3	7	4	12
	3	8	5	10
	7	8	2	9

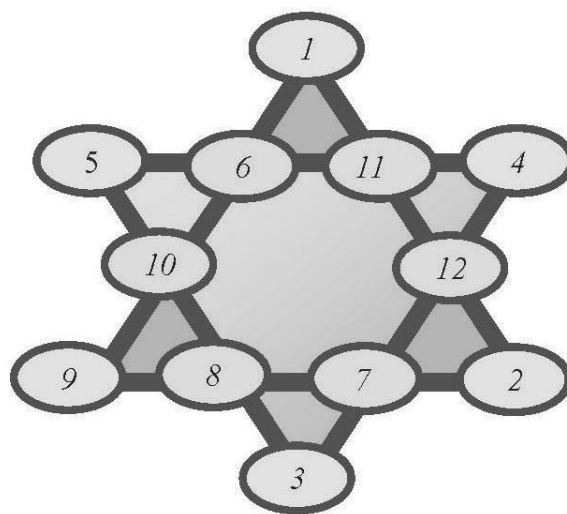


Fig. 4. Estrella Mágica –Base 6 y 11

Entre A y J, tendremos los siguientes resultados:

Tabla V. Combinaciones A-J Alternativa 1

A	1	2	11	12
J	1	7	8	10
	2	10	5	9
	3	4	7	12
	3	6	8	9
	4	6	11	5

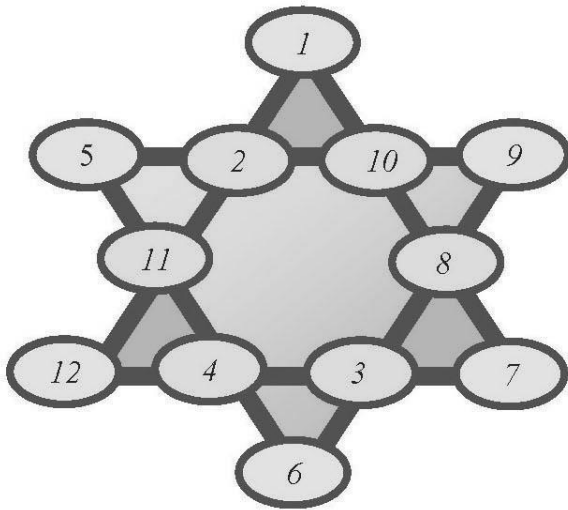


Fig. 5. Estrella Mágica – Base 2 y 10

Tabla VI. Combinaciones A-J Alternativa 2.

A	1	2	11	12
J	1	7	8	10
	7	12	3	4
	5	6	4	11
	5	9	2	10
	6	9	3	8

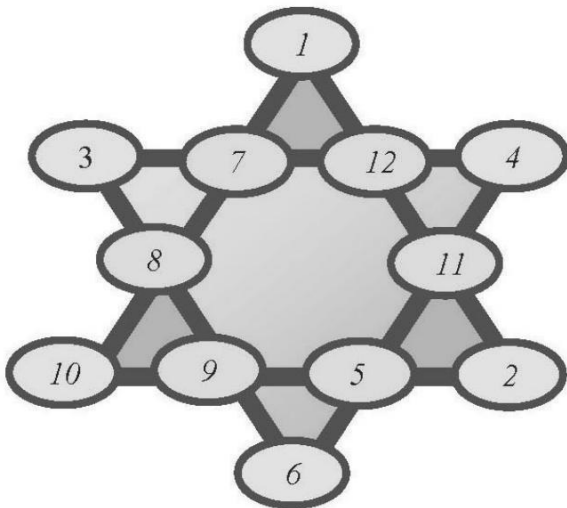


Fig. 6. Estrella Mágica - Base 7 y 12.

Entre B y F se tienen los siguientes resultados:

Tabla VII. Combinaciones B-F Alternativa 1.

B	1	3	10	12
F	1	5	9	11
	3	9	6	8
	2	4	8	12
	2	7	6	11
	4	7	5	10

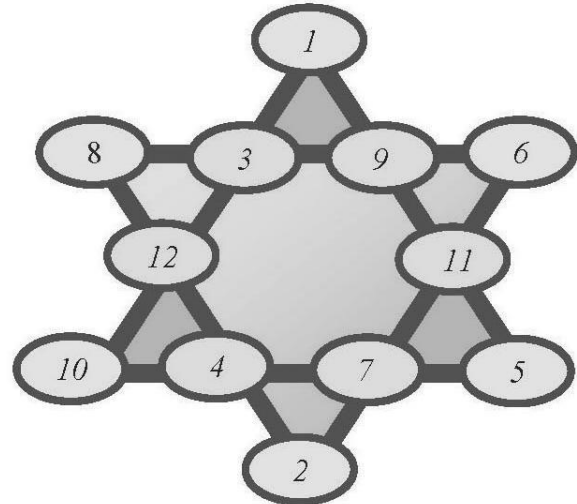


Fig. 7. Estrella Mágica - Base 3 y 9

Tabla VIII. Combinaciones B-F Alternativa 2

B	1	3	10	12
F	1	5	9	11
	3	11	4	8
	2	6	8	10
	2	7	5	12
	6	7	4	9

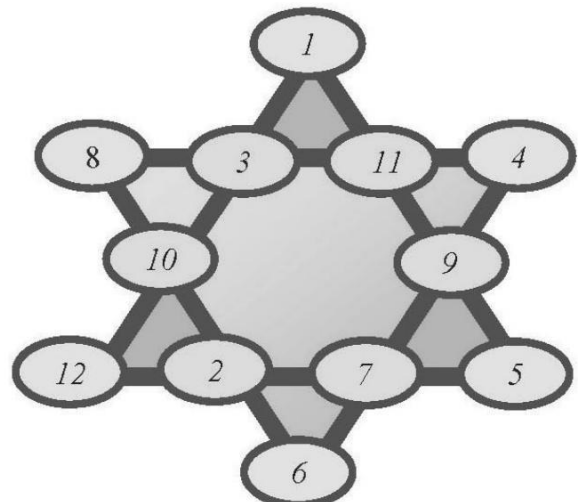


Fig. 8. Estrella Mágica - Base 3 y 11

Entre B y H se tienen los siguientes resultados:

Tabla IX. Combinaciones B-H Alternativa 1

B	1	3	10	12
H	1	6	8	11
	3	11	5	7
	2	4	8	12
	2	9	5	10
	4	9	6	7

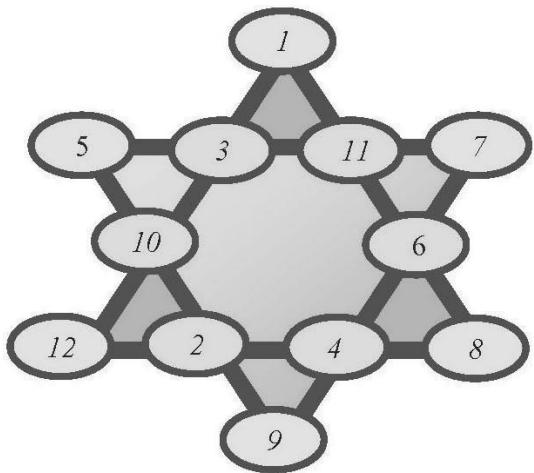


Fig. 9. Estrella Mágica - Base 3 y 11

Para el caso de las combinaciones entre C y J tendríamos:

Tabla XI. Combinaciones C-J Alternativa 1

C	1	4	9	12
J	1	7	8	10
	4	8	3	11
	2	5	9	10
	2	6	7	11
	5	6	3	12

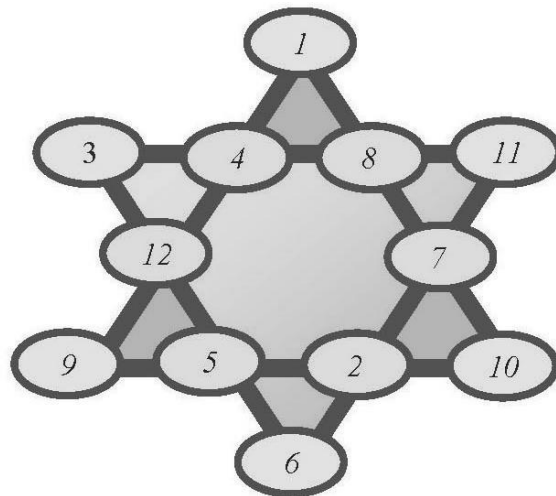


Fig. 11. Estrella Mágica - Base 4 y 8

Para el caso de las combinaciones entre C y H tendríamos:

Tabla X. Combinaciones C-H Alternativa 1

C	1	4	9	12
H	1	6	8	11
	8	9	2	7
	3	5	6	12
	3	10	2	11
	5	10	4	7

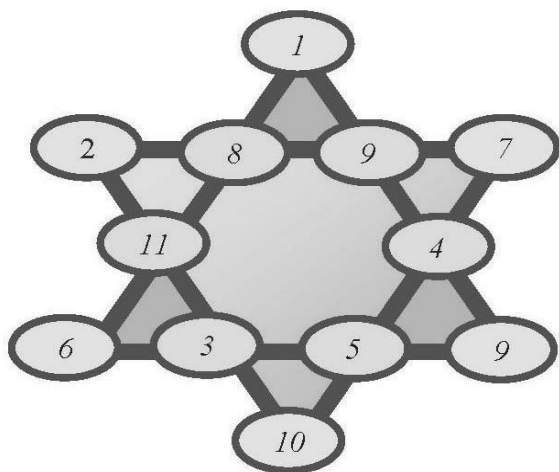


Fig. 10. Estrella Mágica - Base 8 y 9

Tabla XII. Combinaciones C-J Alternativa 2

C	1	4	9	12
j	1	7	8	10
	9	8	3	6
	2	5	7	12
	2	11	3	10
	5	11	4	6

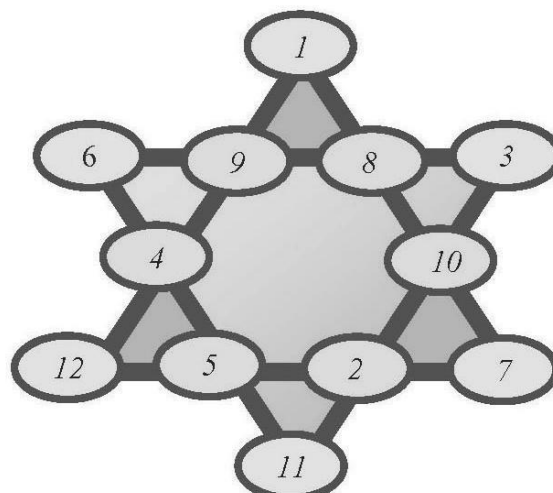


Fig. 12. Estrella Mágica - Base 9 y 8

Entre las combinaciones D y E se tendrá:

Tabla XIII. Combinaciones D-E Alternativa 1

D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
	4	12	3	7
	2	6	7	11
	2	9	5	10
	6	9	8	3

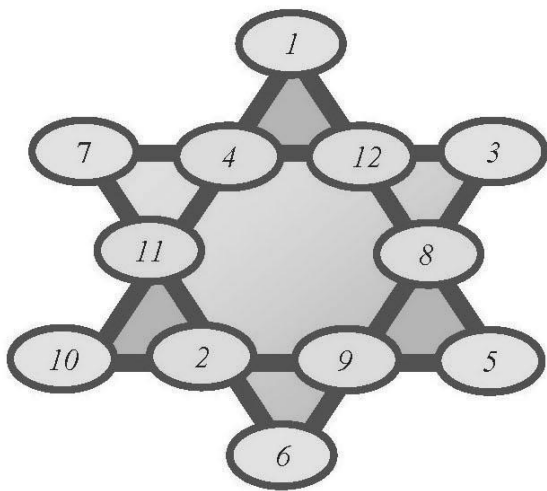


Fig. 13. Estrella Mágica - Base 4 y 12

Tabla XIV. Combinaciones D-E Alternativa 2

D	1	4	10	11
E	1	5	8	12
	8	10	2	6
	3	7	5	11
	3	9	2	12
	7	9	4	6

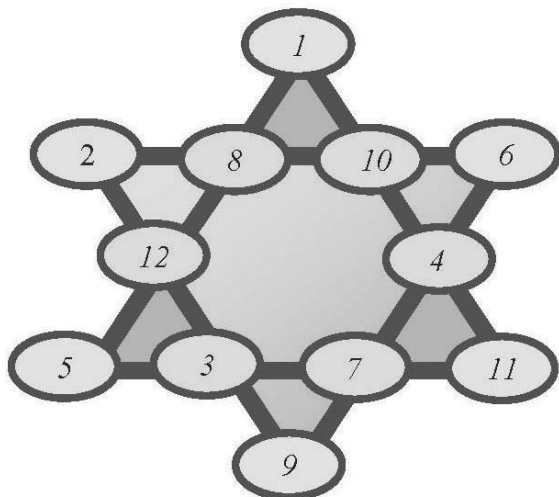


Fig. 14. Estrella Mágica - Base 8 y 10

Para las combinaciones D y G tendremos los resultados:

Tabla XV. Combinaciones D-G Alternativa 1

D	1	4	10	11
G	1	6	7	12
	4	12	2	8
	3	5	7	11
	3	9	6	8
	5	9	2	10

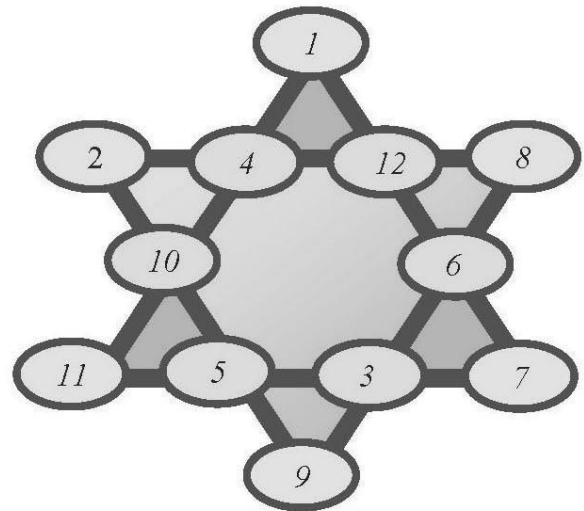


Fig. 15. Estrella Mágica - Base 4 y 12

Tabla XVI. Combinaciones D-G Alternativa 2

D	1	4	10	11
G	1	6	7	12
	6	10	2	8
	3	5	7	11
	3	9	2	12
	5	9	4	8

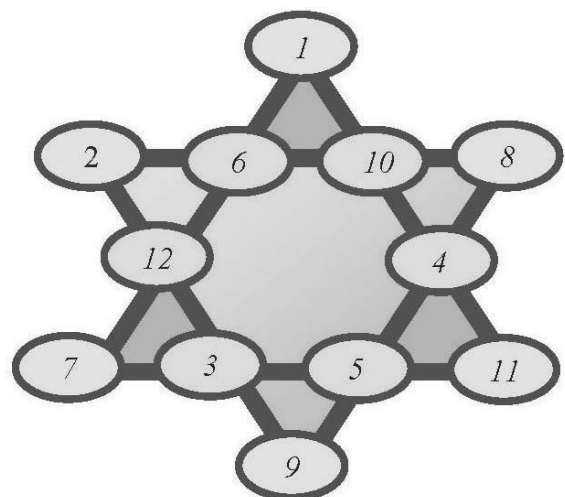


Fig. 16. Estrella Mágica - Base 6 y 10

Para las combinaciones entre E e I, se tendrá:

Tabla XVII. Combinaciones E-I Alternativa 1

E	1	5	8	12
I	1	6	9	10
	5	6	4	11
	2	3	10	11
	2	7	8	9
	3	7	4	12

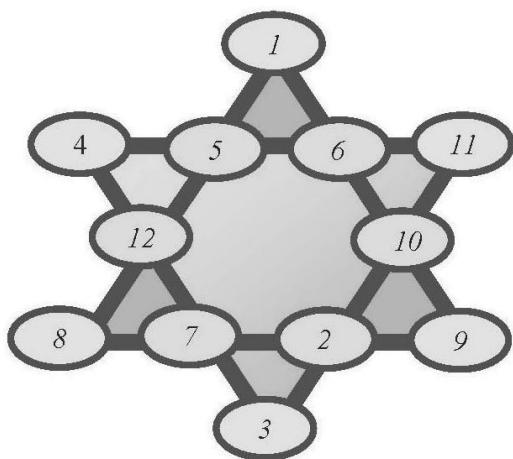


Fig. 17. Estrella Mágica - Base 5 y 6

Combinando entre F y G se tiene:

Tabla XIX. Combinaciones F-G Alternativa 1

F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
	5	7	4	10
	2	3	10	11
	2	8	4	12
	3	8	6	9

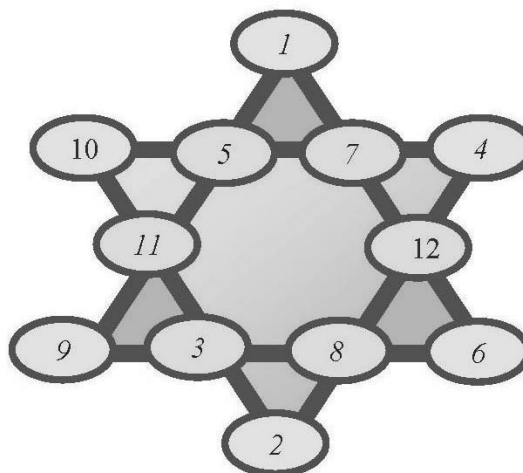


Fig. 19. Estrella Mágica - Base 5 y 7

Tabla XVIII. Combinaciones E-I Alternativa 2

E	1	5	8	12
I	1	6	9	10
	5	10	4	7
	2	3	9	12
	2	11	6	7
	3	11	4	8

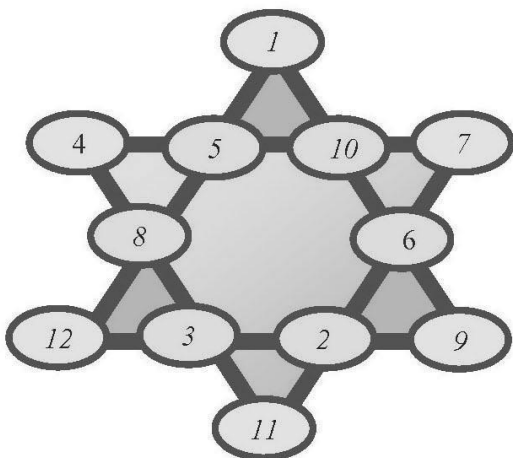


Fig. 18. Estrella Mágica - Base 5 y 10

Tabla XX. Combinaciones F-G Alternativa 2

F	1	5	9	11
G	1	6	7	12
	9	12	2	3
	4	8	3	11
	4	10	7	5
	8	10	2	6

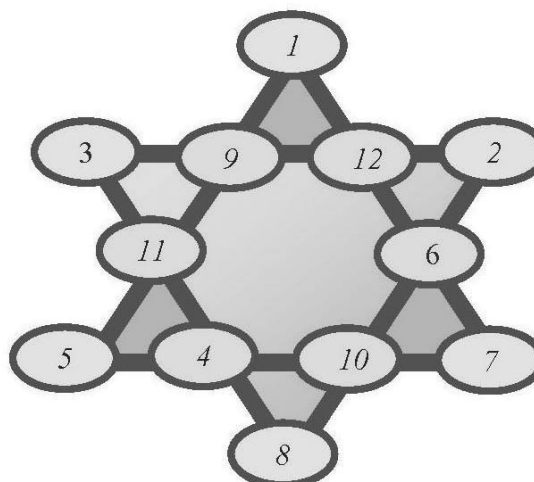


Fig. 20. Estrella Mágica - Base 9 y 12

Combinando entre F y J, tenemos los resultados:

Tabla XXI. Combinaciones F-J Alternativa 1

F	1	5	9	11
J	1	7	8	10
	7	9	4	6
	2	3	10	11
	2	12	4	8
	3	12	5	6

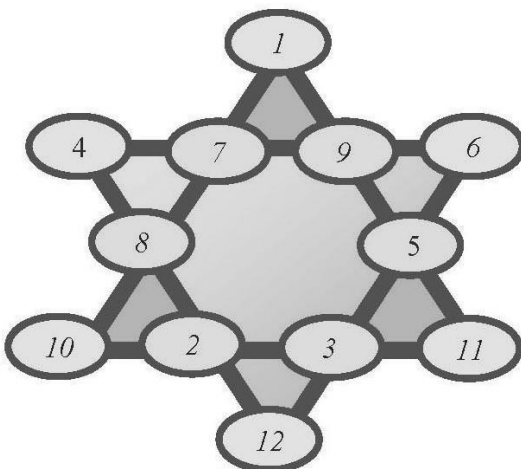


Fig. 21. Estrella Mágica - Base 7 y 9

Tabla XXII. Combinaciones F-J Alternativa 2

F	1	5	9	11
J	1	7	8	10
	9	10	3	4
	2	6	7	11
	2	12	4	8
	6	12	3	5

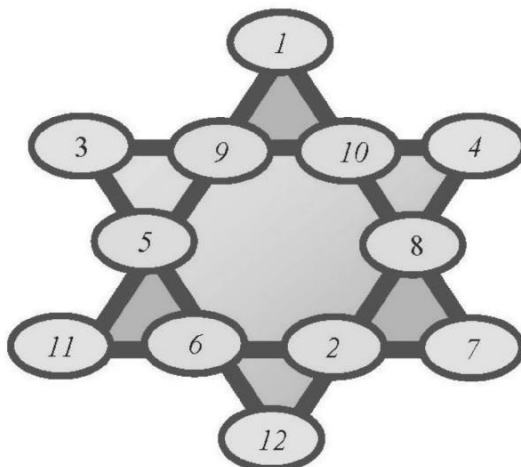


Fig. 22. Estrella Mágica - Base 9 y 10

Tenemos entonces 20 estrellas mágicas distintas.

La estructura de la estrella mágica de seis pun-tas donde cada segmento es una combinación de cuatro elementos que suman una cantidad cons-tante y que tiene un elemento en común con otros cuatro segmentos, y no tiene elementos en común con uno de ellos, se puede observar en la Fig. 23, que el segmento 1, se interseca con los segmentos 2, 3, 5 y 6.; y, no se interseca con el segmento 4, de igual forma, el segmento 2 no se interseca con el segmento 6, y el segmento 3 no se interseca con el segmento 5.

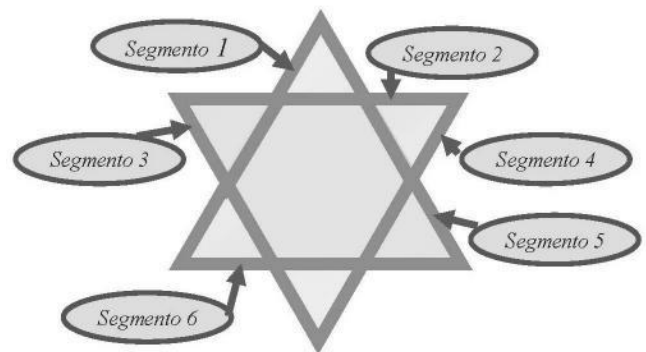


Fig. 23. Segmentos de la Estrella Mágica

Eso hace que si fijamos un segmento, podamos relacionarlos únicamente con las otro cuatro y teniendo en cuenta que entre ellos no se intersequen dos a dos, lo que hace que tengamos no 24 resultados diferentes (4!), sino únicamente 8.

III. ESTRELLAS MÁGICAS DERIVADAS

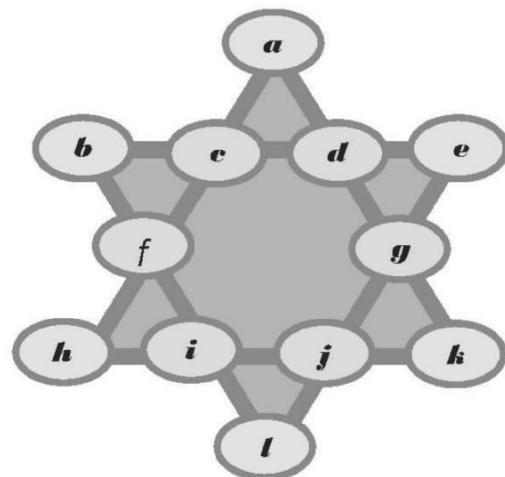


Fig. 24. Estrella Mágica Derivada

- A. Fijamos una esquina, para el ejemplo tomamos la esquina a.
- B. Fijemos la esquina opuesta, en nuestro caso l.
- C. Existen dos segmentos, que no contienen los vértices seleccionados, en estos, a partir de la ubicación del vértice, los cuatro elementos se dividen en dos grupos de dos elementos compuestos por un vértice y un corte, manteniendo al mismo lado con respecto a los vértices cambiamos el vértice de un segmento pasara a ser corte del otro, y viceversa, así movemos los ocho elementos, este se aprecia en la figura 24. Para nuestro ejemplo los grupos serian b y c a la derecha de a; d y e a la izquierdo de a; y además h e i, a la izquierda de l; y, j y k a la derecha de l. Cambiaremos k por d, j por e, h por c y i por b, conforme se plantea en las líneas roja y negra.

D. Con los movimientos indicados, se tiene una nueva estrella mágica donde han cambiado los segmentos, pero los elementos en estos se mantienen, como se observa en la figura 25.

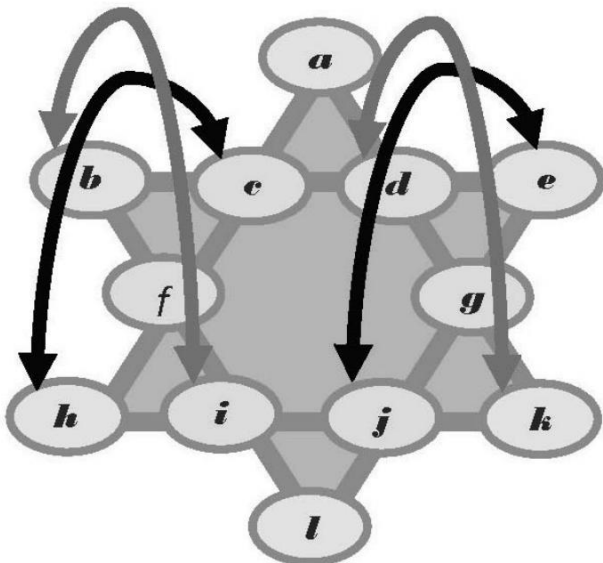


Fig. 25. Estrella Mágica con cambio de segmentos

Debe indicarse que los elementos f y g, no se mueven al igual que los vértices a y l.

Está claro que la estrella resultante es otra, con las mismas combinaciones.

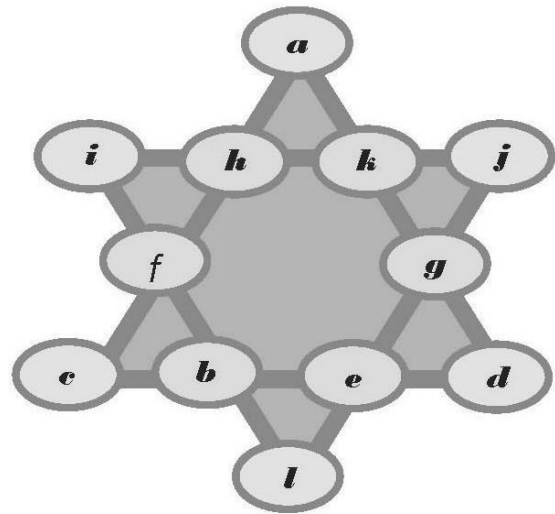


Fig. 26. Estrella Mágica con cambios

De igual manera, siguiendo el mismo proceso y fijando los vértices e y k de la figura 24,

se generan las estrellas mágicas de las figuras 27 y 28.

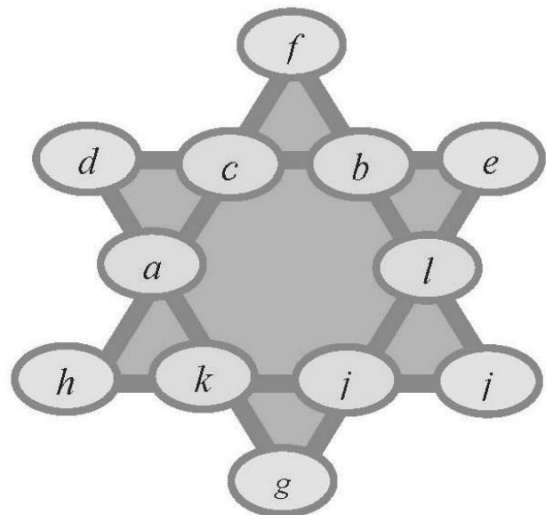


Fig. 27. Estrella Mágica con cambios 1

Es decir de cada estrella mágica se pueden derivar 3 distintas, ó por cada combinación matemática que cumpla las condiciones se tendrán cuatro estrellas mágicas distintas.

Si intentamos otro proceso como el planteado, la estrella resultante será una rotación sobre el centro de las indicadas y no otra.

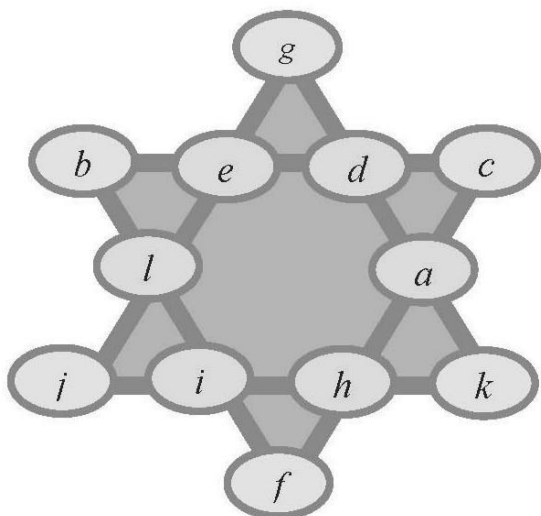


Fig. 28. Estrella Mágica con cambios 2

Se debe anotar por último que por cada estrella mágica se puede generar una simétrica que tam-poco podría considerarse una distinta, mas bien se designara una rotación de 180 grados, tomando como eje la recta que pase por dos vértices opues-tos ó dos cortes opuestos, y el resultado será el mismo.

Una rotación de la Fig. 24 es la Fig. 29

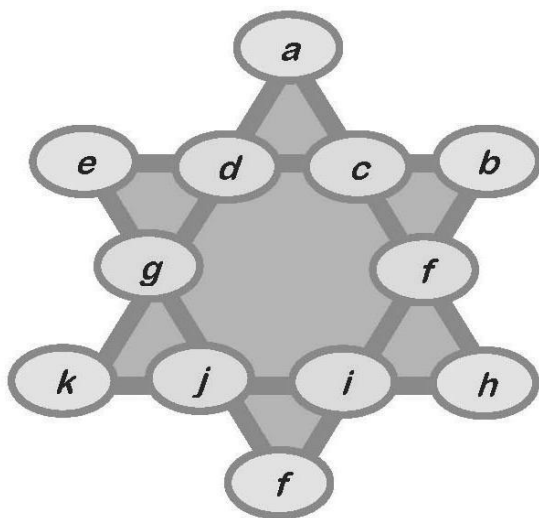


Fig. 29. Estrella Mágica con rotación

Se pueden definir además rotaciones sobre el centro, en sentido de las manecillas del reloj y para cada estrella existirán 6 posibilidades con esta rotación.

Consecuentemente, por cada combinación ma-temática que cumpla las condiciones expuestas an-teriormente, tendremos cuatro estrellas mágicas distintas, cuatro rota-ciones de 180 grados y rota-ciones sobre su centro, es decir 48 estrellas deriva-das, es decir con números consecutivos del 1 al 12 podremos establecer 960 estrellas mágicas, la es-tructura especial de que los elementos que cada segmento, tiene un elemento común con los otros cuatro.

IV. GENERACION DE ESTRELLAS MAGICAS DE SEIS VERTICES

El hecho de que se pueda generar estrellas má-gicas de seis vértices con los elementos enteros del 1 al 12, es de vital importancia, en vista de que esos elementos forman entre sí una sucesión arit-mética y la misma puede transformarse en otras a través de transformaciones lineales cualesquiera, que a su vez formarán otra sucesión aritmética que cumplirá la condición de estrella mágica [6][7].

Lo expresado anteriormente es fácilmente demostrable, supongamos tenemos las seis combinaciones:

Que como se vio en la figura 24 genera una estrella mágica, donde la suma en cada segmen-to es 26.

A estos elementos aplicamos la transformación lineal: $a n + b$, donde a y b son números reales cualesquiera y n es elemento de la estrella mágica de la Tabla XXIII.

Tabla XXIII. Seis combinaciones

1 ^o	1	5	9	11
2 ^a	1	7	8	10
3 ^a	7	9	4	6
4 ^a	2	3	10	11
5 ^a	2	12	4	8
&	3	12	5	6

Realizando las operaciones respectivas, tendre-mos que se genera el nuevo conjunto de seis com-binaciones, que se observa en el Tabla XXIV, donde obviamente los elementos de todas las combina-ciones suman $26a+4b$, como se puede comprobar en la Fig. 30.

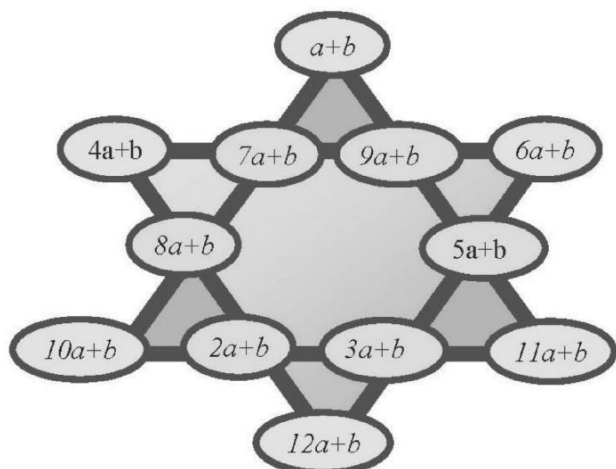


Fig. 30. Estrella Mágica con operaciones

Para verificar podríamos proponer lo siguiente:

Ejemplo 1. Construir la estrella mágica de seis puntas si $a = 5$ y $b = -10$. Las combinaciones derivadas de la Tabla XXIV y son presentadas en la tabla XXV, la estrella mágica de seis puntas será la mostrada en la Fig. 31, donde los elementos de cada segmento suman 90 ($5 \times 26 + 4 \times (-10) = 90$).

Tabla XXIV. Nuevo Conjunto

1 ^o	a+b	5a+b	9a+b	11a+b
2 ^a	a+b	7a+b	8a+b	10a+b
3 ^a	7a+b	9a+b	4a+b	6a+b
4 ^a	2a+b	3a+b	10a+b	11a+b
5 ^a	2a+b	12a+b	4a+b	8a+b
&	3a+b	12a+b	5a+b	6a+b

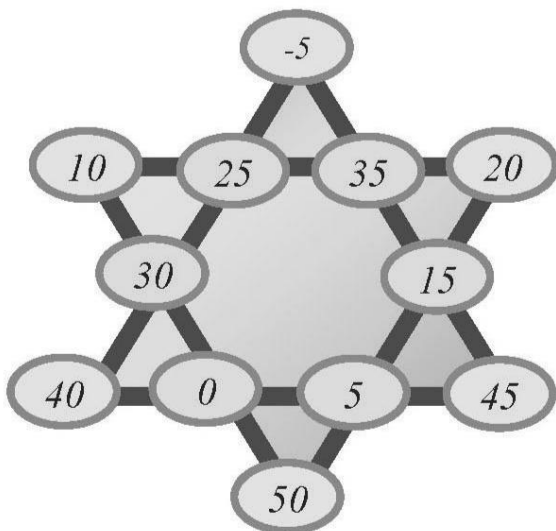


Fig. 31. Estrella Mágica -cada segmento suman 90

Tabla XXV. Combinaciones derivadas

1 ^o	-5	15	35	45
2 ^a	-5	25	30	40
3 ^a	25	35	10	20
4 ^a	0	5	40	45
5 ^a	0	50	10	30
&	5	50	15	20

Esta claro entonces que esto se cumple para cualquier combinación lineal.

V. CONSTRUCCIÓN DE UNA ESTRELLA MÁGICA, CONOCIENDO LA CONSTANTE DE SUMA POR SEGMENTO

Con base de lo anterior, podemos entonces de antemano fijar un valor deseado para la constante de suma por segmento, y en base a definir una transformación lineal planteada, existen infinitas, construir la estrella mágica de seis puntas que cum-ple lo solicitado [8].

Para lograr el objetivo planteado, deberemos seguir el siguiente proceso:

1. Definir el valor que se estipula como constante de suma de elementos por segmento (T).
2. Tomar uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen una estrella mágica.
3. Determinar los valores **a** y **b**, de la relación lineal $26a + 4b = T$, seleccionándolo de infinitas posibilidades (26 es la suma original por segmento).
4. Con los valores de a y b, y en base del grupo de combinaciones seleccionadas en el paso 2, construir un nuevo grupo de combinaciones con los resultados de afectar a cada elemento dicha relación lineal.
5. Construir la nueva estrella mágica, ha sabiendas de que existen cuatro distintas, 4 simétricas y 48 derivaciones en total tomando en cuenta las rotaciones.

Ejemplo 2.

1. Fijar el valor de T es cien (100)

- Escoger las combinaciones de la Tabla XXVI, que es una copia de la Tabla XVI.

$26a + 4b = 100, \iff b = (100 - 26a)/4$, es una relación equivalente, que muestra las infinitas posibilidades para escoger pares a y b que cumplan, (a = 1, b = 37/2 = 18.5), (a = 2, b = 12), (a = 3, b = 11/2), (a = 4, b = -1), son cuatro de ellas, escogeremos a = 2, b = 12.

- Aplicando la transformación $2n + 12$ a cada elemento de la Tabla XXVI, tendremos la Tabla XXVII.

Tabla XXVI. Combinaciones ejemplo 2

1º	1	4	10	11
2º	1	6	7	12
3º	6	10	2	8
4º	3	5	7	11
5º	3	9	2	12
6º	5	9	4	8

Tabla XXVII. Transformación

1º	14	20	32	34
2º	14	24	26	36
3º	24	32	16	28
4º	18	22	26	34
5º	18	30	16	36
6º	22	30	20	28

- Se construye la estrella mágica requerida, que se observa en la Fig. 32, donde se puede

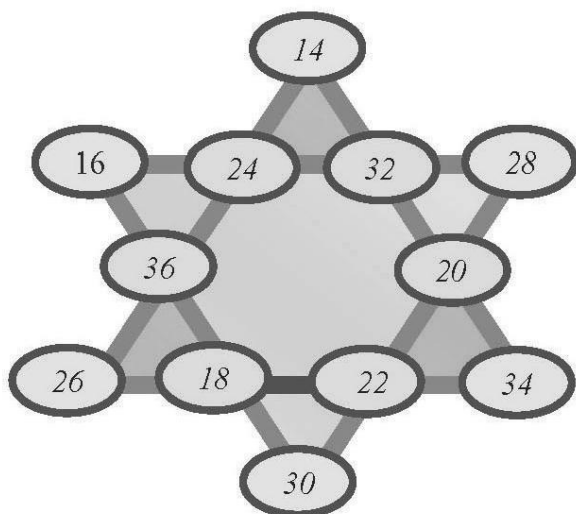


Fig. 32. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 100.

apreciar que se cumple la condición de estrella mágica de seis puntas, donde los elementos de cada segmento suman cien, cumpliendo el objetivo planteado.

VI. CONSTRUCCION DE ESTRELLAS MÁGICAS CON VALORES QUE FORMAN UNA SERIE ARITMÉTICA

Con lo anteriormente indicado esto se facilita bastante, para aclarar diremos **“Si tenemos una serie aritmética de hasta doce elementos, se podrá construir estrellas mágicas con estos según se ha demostrado”**, si la cantidad de elementos es menos de doce, y forman una serie aritmética, se completara la serie y se procederá a construir la estrella mágica deseada [9].

Ejemplo 3. Deseamos construir una estrella mágica que contenga los elementos 19, 7, 15, 11.

Si ubicamos ordenadamente los números indicados: 7, 11, 15 y 19, vemos que si forma una serie aritmética donde la razón es 4, y existen 9 posibilidades para construir la serie completa, ya que el 7 puede ubicarse en el primero, segundo y hasta novena ubicación.

Este grupo de números también forman una serie aritmética de razón 2, donde los valores expuestos no son secuenciales en la sucesión, en este caso existen 5 series, el 7 puede ocupar desde el primer puesto hasta el quinto.

Para desarrollar el ejemplo escogeremos una serie de razón 2 donde el 7 ocupe el tercer puesto, es decir la serie aritmética seria: (3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25).

Que resulta de utilizar la aplicación lineal $2n + 1$, a la estudiada, es sabido que para esto se puede tomar cualquiera de los veinte grupos de combinaciones que permiten la construcción de estrellas mágicas, escogeremos las que se ven en la Tabla XXVIII, que son las de la Tabla VII.

Aplicando la combinación lineal a estas combinaciones, se generan las combinaciones de la Tabla XXIX.

Ubicando esas combinaciones generamos la estrella mágica de la Fig. 33.

Tabla XXVIII. Combinaciones Tabla VII

1°	1	3	10	12
2°	1	5	9	11
3°	3	9	6	8
4°	2	4	8	12
5°	2	7	6	11
6°	4	7	5	10

Tabla XXIX. Combinaciones Resultantes Ejemplo 3

1°	3	7	21	25
2°	3	11	19	23
3°	7	19	13	17
4°	5	9	17	25
5°	5	15	13	23
6°	9	15	11	21

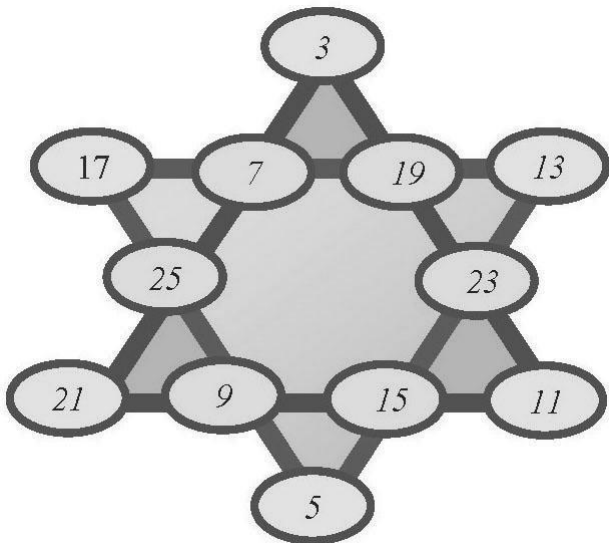


Fig. 33. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 56.

Se puede observar que la misma cumple con las condiciones de estrella mágica, que obviamente contiene como elementos los números 7, 11, 15 y 19, con una suma constante por segmento de 56.

Cuando se propone construir estrellas mágicas que contengan dos números cualesquiera, siempre será posible encontrar la serie aritmética que los contenga, seguiremos el siguiente proceso:

1. Calcularemos la razón que será la diferencia entre los dos números ó lo que resulte de dividir esta diferencia para enteros del 1 al 11.

2. Luego construiremos la serie aritmética de la cual los elementos forman parte, existirán algunas posibilidades, dependiendo del valor para el cual se ha dividido la diferencia, si razón se ha calculado dividiendo la diferencia para i (valor entre 1 y 11), existirán $12 - i$ series aritméticas.
3. Encontraremos la aplicación lineal que la genera de la base de los números enteros del 1 al 12.
4. Escogeremos uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen estrellas mágicas.
5. Generaremos el nuevo grupo de combinaciones.
6. Construiremos la estrella mágica requerida (existen 48 posibles).

Ejemplo 4. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 7 y 136.

La diferencia entre estos dos números es 129, cuyos submúltiplos son 1, 3, 43 y 129, resultantes de dividir la diferencia para 136, 43, 3 y 1 respectivamente, de éstos los menores a 13 son 3 y 1, entonces las posibles razones serán 43 ó 129, para el desarrollo escogeremos como razón el valor de 43, entonces entre los elementos 7 y 136 se ubicaran dos más (50 y 93), por lo que es posible proponer series donde el 7 pueda ser el primer elemento o ubicarlo hasta en el noveno lugar, es decir existen 9 posibilidades, escogeremos aquella donde el elemento 7 este en el quinto lugar, por tanto la serie aritmética será: (-165, -122, -79, -36, 7, 50, 93, 136, 179, 222, 265, 308).

La aplicación lineal para este caso será: $43n - 208$.

Tomaremos como base las combinaciones que se presentan en la Tabla XXX, que es una copia de la Tabla XI.

Aplicando la combinación lineal planteada tenemos el grupo de combinaciones que se presentan en la Tabla XXXI.

Con las combinaciones indicadas es posible construir la estrella mágica requerida, misma que

Tabla XXX. Combinaciones Tabla XI

1°	1	4	9	12
2°	1	7	8	10
3°	4	8	3	11
4°	2	5	9	10
5°	2	6	7	11
6°	5	6	3	12

Tabla XXXI. Combinaciones Resultantes Ejemplo 4

1°	-165	-36	179	308
2°	-165	93	136	222
3°	-36	136	-79	265
4°	-122	7	179	222
5°	-122	50	93	265
6°	7	50	-79	308

se observa en la Fig. 34. Donde se observa que están presentes los números 7 y 136, además todos los elementos suman 286.

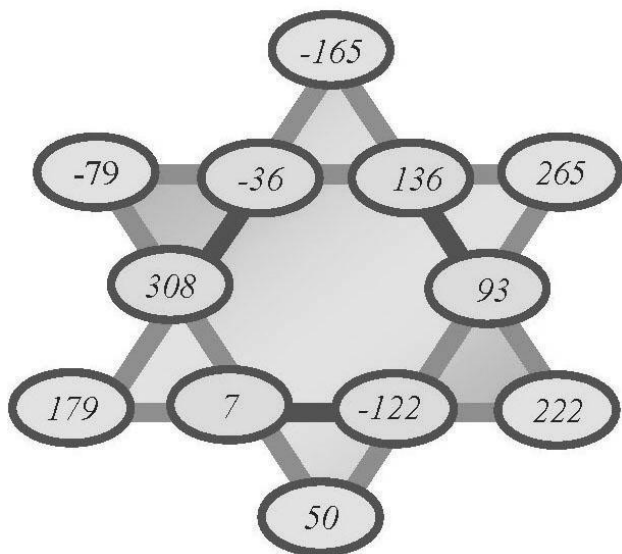


Fig. 34. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 286.

Si lo que se desea es construir una estrella mágica que contenga tres valores dados deben cumplirse una de las siguientes condiciones:

- a. El número medio es el promedio aritmético entre los dos extremos.
- b. La diferencia entre el número mayor y el número intermedio debe ser múltiplo de la diferencia entre el número medio y el número menor, y la razón entre las diferencias debe ser un entero menor a once.

- c. La diferencia entre el número menor y el número intermedio debe ser múltiplo de la diferencia entre el número medio y el número mayor, y la razón entre las diferencias debe ser un entero menor a once.
- d. La diferencia entre el número mayor y el número medio, y la diferencia entre el número medio y el número menor son múltiplos de un mismo número, y sus razones con respecto a ese submúltiplo común no deben sumar más de once.

El caso a es evidente, pues los tres números formarían una serie aritmética.

Para estos casos se asegura el siguiente proceso:

1. Identificar la razón, en algunos casos será posible encontrar además otra razón submúltiplo de esta.
2. Construir la serie aritmética que los contenga, es posible que existan, mas de una posibilidad.
3. Encontraremos la aplicación lineal que la genera de la base de los números enteros del 1 al 12.
4. Escogeremos uno de los veinte grupos de combinaciones que construyen estrellas mágicas.
5. Generaremos el nuevo grupo de combinaciones.
6. Construiremos la estrella mágica requerida (existen 48 posibles).

Ejemplo 5. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 75, 12, 21.

Ordenando los números tendremos: 12, 21 y 75, entonces la diferencia entre el número mayor y el intermedio es 54 y la diferencia entre el intermedio y el menor es 9, donde se puede ver que la diferencia mayor dividida para la diferencia menor es 6, entonces en este caso la razón de la serie

aritmética sería el 9, como además $6 + 1 = 7$, que es menor que 11, y además, en este caso, no es posible tomar otra razón para la serie aritmética, por cuanto en ese caso la suma de los cocientes será mayor a once.

Entre 12 y 75, tenemos por tanto cinco números intermedios que construirán una serie obligada de siete elementos, los cinco restantes pueden ser a la izquierda, a la derecha o a ambos lados, existen por tanto existen seis posibles series, escogeremos aquella donde el 12 se ubique en el tercer puesto, es decir la serie es: (-6, 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93), que tiene razón nueve y contiene los doce elementos.

La aplicación lineal será: $9n - 15$.

Escogemos el grupo de combinaciones que se ve en la Tabla XXXII, igual a la Tabla XIV, para aplicar a este la combinación lineal planteada y generar la Tabla XXXIII, con el que construiremos la estrella mágica que se observa en la Fig. 35.

Tabla XXXII. Combinaciones Tabla XIV

1°	1	4	10	11
2°	1	5	8	12
3°	8	10	2	6
4°	3	7	5	11
5°	3	9	2	12
6°	7	9	4	6

Tabla XXXIII. Combinaciones Resultantes Ejemplo 5

1°	-6	21	75	84
2°	-6	30	57	93
3°	57	75	3	39
4°	12	48	30	84
5°	12	66	3	93
6°	48	66	21	39

Se puede comprobar que la estrella mágica planteada contiene a los elementos: 12, 21 y 75, además se debe indicar que la constante de suma por segmento es 174.

Ejemplo 6. Construir una estrella mágica de seis puntas que contenga los números 43, 11, 83.

En este caso, los números ordenados serán: 11, 43 y 83, por tanto la diferencia del número mayor

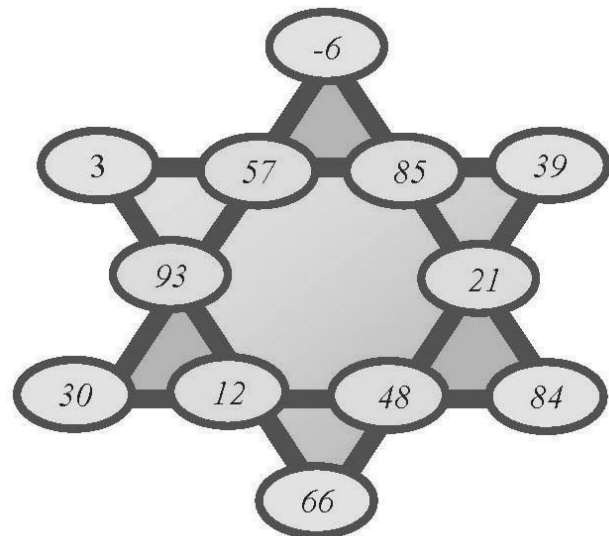


Fig. 35. Estrella Mágica resultante – cada segmento suma 174.

al medio será 40 y del intermedio al menor será 32, en este caso el cociente entre las diferencias no es un valor entero, pero en cambio las dos son múltiplos de los números 8, 4, 2 y 1.

En este caso tenemos $32/8 = 4$ y $40/8 = 5$, y además $4 + 5 < 12$.

Si hacemos este cálculo para otro submúltiplo $32/4 = 8$ y $40/4 = 10$, donde $8 + 10 > 11$, es decir podemos construir la serie aritmética con razón 8, y no de los demás submúltiplos, tendríamos la serie: 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83, compuesta de 10 elementos, deberemos añadir 2 elementos menores, un menor y un mayor o dos mayores, escogeremos el caso donde el 11 sea el segundo elemento, la serie sería: (3, 11, 19, 27, 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83, 91).

La aplicación lineal sería: $8n - 5$.

Escogemos los grupos de combinaciones que se observan en la Tabla XXXIV, que es igual a la Tabla V y que en función de la aplicación lineal planteada se genera la Tabla XXXV y que posibilitan construir la estrella mágica que se presenta en la Fig. 36.

Se comprueba que todos los segmentos suman 188, donde están presentes los números 43, 11 y 83.

