Revista de Educação Dom Alberto
ISSN 2316-2260

A INTERPRETAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM DOIS ATRAVÉS DO *SOFTWARE GEOGEBRA*: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Viviane Beatriz Hummes[1]

Adriana Breda[2]

Valderez Marina do Rosário Lima[3]

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar os resultados referentes a uma investigação que aborda o estudo das soluções de Sistemas de Equações Lineares de ordem dois, a partir de sua representação geométrica, através do uso do *Geogebra*. Para tanto, foi realizado um estudo de caso com alunos do nono ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública de Porto Alegre. Os dados, coletados através de questionários e analisados através da Análise Textual Discursiva, emergiram em duas categorias. Na primeira, discute-se a compreensão, por parte dos alunos, de que a solução de um sistema de ordem 2 correspondem aos pontos de intersecção determinados pela posição relativa entre duas retas. A segunda demonstra que, a partir da comparação entre os resultados algébricos e geométricos, os alunos foram capazes de compreender o significado das soluções.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. Representação geométrica. G*eogebra*.

ABSTRACT

This work aims at presenting the results regarding an investigation that deals with the study of solutions of second-order linear equation systems, through its geometric representation, using *Geogebra*. To do so, a case study has been conducted with students on the ninth grade of Elementary School, at a public school in Porto Alegre, Brazil. The data, collected through questionnaires and analyzed through Discursive Textual Analysis, emerged into two different categories. The first one discusses the students comprehension that the solution of a second-order system corresponds to the intersection points determined by the relative position between two lines. The second category shows that, based on the comparison between the algebraic and geometric results, students were able to understand the meaning of the solutions.

Keywords: Linear equation systems. Geometric representation. *Geogebra*.

[1] Mestra em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, professora de matemática na Prefeitura Municipal de Porto Alegre. E-mail: vivihummes@gmail.com.
[2] Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS. E-mail: adriana.breda@gmail.com.
[3] Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS, professora no PPGEDUCEM - PUCRS. E-mail: valderezlima@pucrs.br.

CONTEXTUALIZANDO O PROBLEMA DE PESQUISA

O estudo dos Sistemas de Equações Lineares e de suas soluções está inserido nos mais diversos componentes curriculares da área da Matemática, sejam eles da Educação Básica ou da Educação Superior. Sabe-se que, em termos de solução, todo Sistema de Equações Lineares pode apresentar: nenhuma solução, exatamente uma solução ou uma infinidade de soluções. Neste universo, apresentam-se muitos métodos para obtenção das soluções de diversos tipos de Sistemas de Equações Lineares, contudo, a compreensão da solução de um sistema a partir de sua representação geométrica, muitas vezes, não é trabalhada nas aulas de Matemática por diversas razões. Compreendemos que uma dessas razões está no fato de que a maneira como se apresenta a resolução de Sistemas de Equações Lineares se dá através de procedimentos puramente mecânicos, seja pelo método da substituição, da adição, do escalonamento, entre outros.

Além disso, em muitos casos, essa resolução técnica e procedimental carece de uma interpretação por parte dos alunos, que acabam por obter resultados sem atribuir significados a estes. Nessa perspectiva, na visão do aluno, o resultado é apenas um número.

Em muitas pesquisas relacionadas ao ensino de Sistemas de Equações Lineares, a interpretação geométrica das soluções tem se mostrado de extrema importância e utilidade como caminho para propostas didáticas, produzindo resultados significativos em relação à aprendizagem dos alunos.

Um exemplo é o trabalho de Jordão (2011), o qual apresenta uma discussão sobre as resoluções algébricas e geométricas de Sistemas de Equações Lineares de duas equações e duas variáveis, através de uma sequência didática, utilizando o *software Winplot* para representar graficamente as soluções do sistema. Após o desenvolvimento da pesquisa, a autora destaca a relevância da utilização do *Winplot*, e conclui que o *software* contribui para a visualização e compreensão da resolução de Sistemas Lineares. Na mesma esteira, em nível de mestrado, Carneiro (1997) desenvolve uma proposta didática para o ensino de Sistemas de Equações Lineares no Ensino Médio. Por meio da geometria vetorial, disponibiliza uma ferramenta que tem a intenção de habilitar os alunos a analisarem geometricamente Sistemas Lineares de ordem 3.

Em um relato sobre parte de um projeto de pesquisa, Cury e Bisognin (2009) analisam a influência dos conteúdos exigidos nas avaliações educacionais, de âmbitos nacionais e estaduais, no desenvolvimento das habilidades necessárias para modelar uma situação-problema e solucioná-la por meio de um Sistema de Equação Linear. Esta pesquisa, realizada com alunos ingressantes em cursos de nível superior no sul do Brasil, evidencia que, apesar das avaliações indicarem as competências que os alunos de Ensino Básico devem obter em relação à resolução de Sistemas de Equações Lineares, os estudantes avaliados cometeram erros na resolução do sistema.

Assim, com a intenção de contribuir com as pesquisas relativas à interpretação geométrica de Sistemas de Equações Lineares, este trabalho tem como objetivo abordar o estudo das soluções de Sistemas de Equações Lineares de duas equações e duas variáveis, a partir de sua representação geométrica, através do uso do *software Geogebra*. Com isso, esperamos que o aluno que está cursando o nono ano do Ensino Fundamental possa compreender que a solução de um Sistema de Equação Linear de ordem 2 não se apresenta apenas como um número, mas sim como o ponto de interseção entre duas retas de um mesmo plano, representadas por suas respectivas equações (BARTOJO, 2007).

Desta forma, por meio de um estudo de caso realizado com alunos do nono ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública de Porto Alegre, RS, Brasil, pretendemos mostrar como a interpretação geométrica, a partir do uso do *software Geogebra*, pode contribuir para uma melhor compreensão das soluções dos Sistemas de Equações Lineares.

Na seção a seguir, discorremos sobre o referencial teórico que utilizamos como base para esta pesquisa, apresentando na sequência, a metodologia que adotamos e os resultados que obtivemos no decorrer de nossa investigação.

DE ONDE FALAMOS

Justificamos nossa forma de trabalho, em sala de aula, trazendo como pano de fundo uma das principais ideias de Freire (1987): a Educação Libertadora. A liberdade, da qual o autor trata, não está traduzida no sentido de uma liberdade relativa e individualizada, mas sim, como uma prática social que tem como principal enfoque a tomada de decisão, de tal forma que, para ela acontecer, é necessário que o sujeito tenha autonomia e criticidade nas suas ações. Estas últimas só podem ser construídas com base no diálogo (FREIRE, 1987).

Nesse aspecto, concordamos com Portanova *et al*. (2005), que defende a ideia de que as tecnologias em sala de aula são utilizadas para a construção do conhecimento e, conforme a intervenção do professor e a interação com os colegas, podem apresentar soluções para determinados problemas, de forma que se efetive, além de uma transformação da realidade, uma modificação na aprendizagem dos sujeitos envolvidos.

Pensando nessa possibilidade de transformação, compreendemos que, ao abordarmos as soluções de Sistemas de Equações Lineares, a partir de sua visualização geométrica, subsidiada pelo uso do *software Geogebra* na aula de Matemática, promovemos uma interação entre alunos, professor e o próprio *software*, pois este último se torna parte integrante do processo do fazer matemática, proporcionando ao aluno uma conduta investigativa, possibilitando-o criar conjecturas, comparar resultados, refutá-los ou validá-los (BORBA, 2010).

Compreendemos, também, que ao trabalharmos com alunos de uma faixa etária compreendida entre 12 e 15 anos, faz-se necessário o entendimento do processo cognitivo de aprendizagem dos mesmos. Sabe-se, segundo uma visão cognitivista, que o adolescente é um indivíduo que está aberto para construir e criar teorias, apresentando interesse pelos mais variados tipos de problema, inclusive os que não apresentam relações com a realidade vivenciada. Um aspecto que diferencia a criança do adolescente é que este apresenta maior habilidade em criar teorias abstratas, seja uma nova filosofia, formas criativas de resolver problemas, etc (PIAGET, 2012).

Nesse período da vida, começa-se o desenvolvimento do pensar hipotético-dedutivo, ou seja, a passagem do pensamento concreto para o formal (PIAGET, 2012). Em função disso, o adolescente é capaz de operar logicamente no mundo das ideias, refletindo-as e expressando-as através da linguagem, seja ela falada, escrita, ou através de símbolos matemáticos.

Em função disso, temos o entendimento de que trabalhar sistemas de duas equações com duas variáveis a partir do ponto de vista de sua solução geométrica, por meio do auxílio tecnológico, com adolescentes que cursam o nono ano do Ensino Fundamental, reforça que a aprendizagem é um processo construtivo, que depende de modo fundamental das ações do sujeito e de suas reflexões sobre estas ações, onde todo conhecimento está voltado à ação (GRAVINA, 1998).

O CAMINHO PERCORRIDO DURANTE A INVESTIGAÇÃO

A metodologia escolhida para essa pesquisa é a qualitativa que, segundo Moraes (2007), pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação. Nesse sentido, diferentemente de uma análise quantitativa, não tem como objetivo testar hipóteses para comprová-las ou invalidá-las ao final do estudo; a intenção é a de compreender e reconstruir conhecimentos existentes sobre os temas investigados. Além disso, trata-se de um estudo de caso, (Ponte, 1994), realizado com uma turma de cinco alunos que cursam o nono ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública localizada no município de Porto Alegre, RS, Brasil. Esta investigação contou com a participação discreta de apenas cinco alunos devido ao fato de ser uma atividade proposta no turno inverso ao das aulas regulares dos estudantes participantes.

A coleta dos dados deu-se através de dois questionários realizados com os alunos, um com a intenção de identificar as ideias prévias e outro para registrar as aprendizagens adquiridas pelos estudantes após a efetivação das atividades propostas. Além disso, foram feitos registros das observações participantes realizadas no decorrer das aulas (GERHARDT & SILVEIRA, 2009).

Em primeira instância, apresentamos aos alunos o *software Geogebra*, oferecendo a eles a operacionalização de alguns comandos que poderiam vir a ser utilizados na atividade, por exemplo: comando de entrada; interseção de dois objetos; janela de álgebra; propriedades do objeto (cor, estilo); etc. Em seguida, para identificação das ideias prévias, lançamos uma situação-problema de tal forma que, para solucioná-la, esperava-se que os alunos resgatassem seus próprios conhecimentos sobre Sistemas de Equações Lineares de ordem 2. Logo após, perguntamos como eles poderiam representar o resultado do problema, geometricamente, e se eles sabiam quais eram as posições relativas entre duas retas. Em seguida, solicitamos aos alunos que construíssem os gráficos das equações de três Sistemas de Equações Lineares no *software Geogebra*, cada sistema em uma janela de eixos distintos. A partir desta projeção, pedimos aos alunos que marcassem os pontos de interseção das retas de cada sistema e, assim, observassem geometricamente suas soluções, discutindo, na medida do possível, os resultados obtidos com os colegas.

Após a discussão entre os pares, convidamos os alunos a responderem as questões do questionário final. Na primeira questão, desafiamos os alunos a resolverem os mesmos sistemas de forma algébrica, para que respondessem a seguinte questão: quais as relações das imagens projetadas no *Geogebra* com o resultado algébrico que você encontrou? Explique detalhadamente para os três casos. Além disso, perguntamos aos alunos o que eles haviam aprendido com a realização das atividades propostas e quais foram os obstáculos encontrados para efetuá-las, sejam dificuldades relacionadas ao uso do *Geogebra*, sejam dificuldades relacionadas ao entendimento da solução geométrica dos sistemas e suas relações com os resultados algébricos.

Tanto os questionários, quanto os registros da observação foram analisados a partir da Análise Textual Discursiva de Moraes e Galiazzi (2007), a qual trabalha com a ideia de unitarização, categorização e construção do metatexto, este último como produto de uma inter-relação entre os dados, concepções teóricas escolhidas para a análise e a capacidade compreensiva do pesquisador.

Na próxima seção, apresentamos os resultados obtidos a partir da análise das respostas dos questionários e das observações realizadas durante o desenvolvimento das atividades feitas com os alunos.

A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA DE EQUAÇÃO LINEAR A PARTIR DO USO DO *SOFTWARE GEOGEBRA*

Para desenvolvermos esta seção, partiremos da análise do modo como os alunos resolveram a situação-problema proposta no questionário inicial: *Num quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que ao todo há 112 pés, que todas as galinhas tem 2 pés e que todos os porcos tem 4 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?* Os alunos

Revista de Educação Dom Alberto
ISSN 2316-2260

não tiveram muita dificuldade em traduzir a situação apresentada no problema para um Sistema de Equações Lineares. Contudo, inicialmente, alguns alunos tentaram resolver o problema por regra de três. Mas, ao verificarem que desta maneira não chegariam a uma resposta correta, representaram o número de porcos e de galinhas através de variáveis e, assim, resolveram o Sistema de Equações Lineares. Abaixo, segue a Figura 1 e a Figura 2, as quais expressam as soluções apresentadas pelo aluno B, que inicialmente tentou resolver a situação proposta utilizando regra de três.

FIGURA 1 - Solução pela regra de três apresentada pelo aluno B

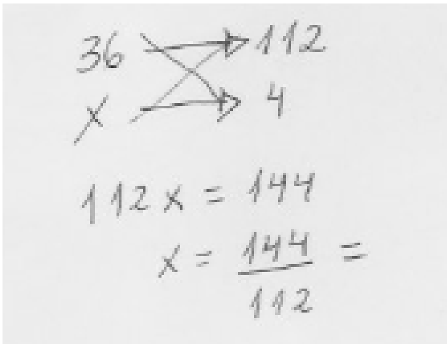
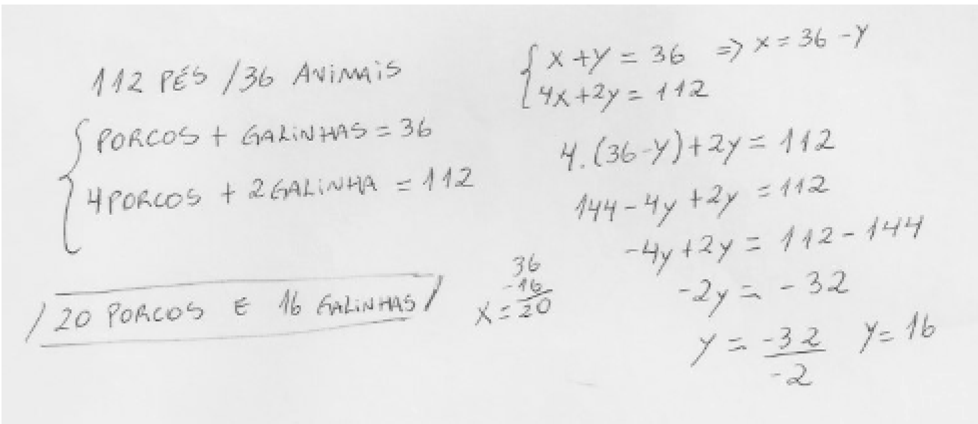


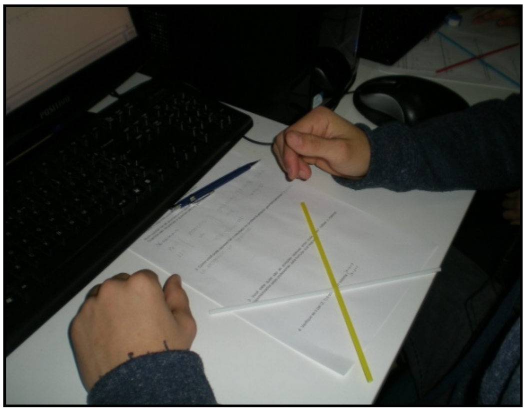
FIGURA 2 - Solução apresentada pelo aluno B



Ainda no questionário prévio, ao perguntarmos como os alunos poderiam representar geometricamente a solução obtida ao resolverem o problema proposto, os estudantes responderam que seria através da construção do gráfico no *software Geogebra,* o que de fato aconteceu com o aluno M, pois este utilizou diretamente o *software* para resolução do problema. Acreditamos, segundo as ideias de Borba (2010), que os alunos, ao argumentarem que fariam o uso do *software* para representar geometricamente a situação proposta, evidenciam uma interação entre estes e o *Geogebra*. Desta maneira, este último passou a fazer parte integrante do processo de fazer matemática.

Para auxiliar na resposta sobre quais são as posições relativas entre duas retas, disponibilizamos o uso de canudos para representar as retas e permitimos que estes fossem manipulados a fim de que os alunos percebessem que os pontos de encontro eram, conforme a resposta do aluno A: “[...] ou 1, ou nenhum, ou todos” (Aluno A). Abaixo, segue a Figura 3 e a Figura 4 que registram o momento em que os alunos manipularam os canudos.

FIGURAS 3 E FIGURA 4 - Fotografias dos alunos manipulando canudos representando as posições relativas de duas retas no plano

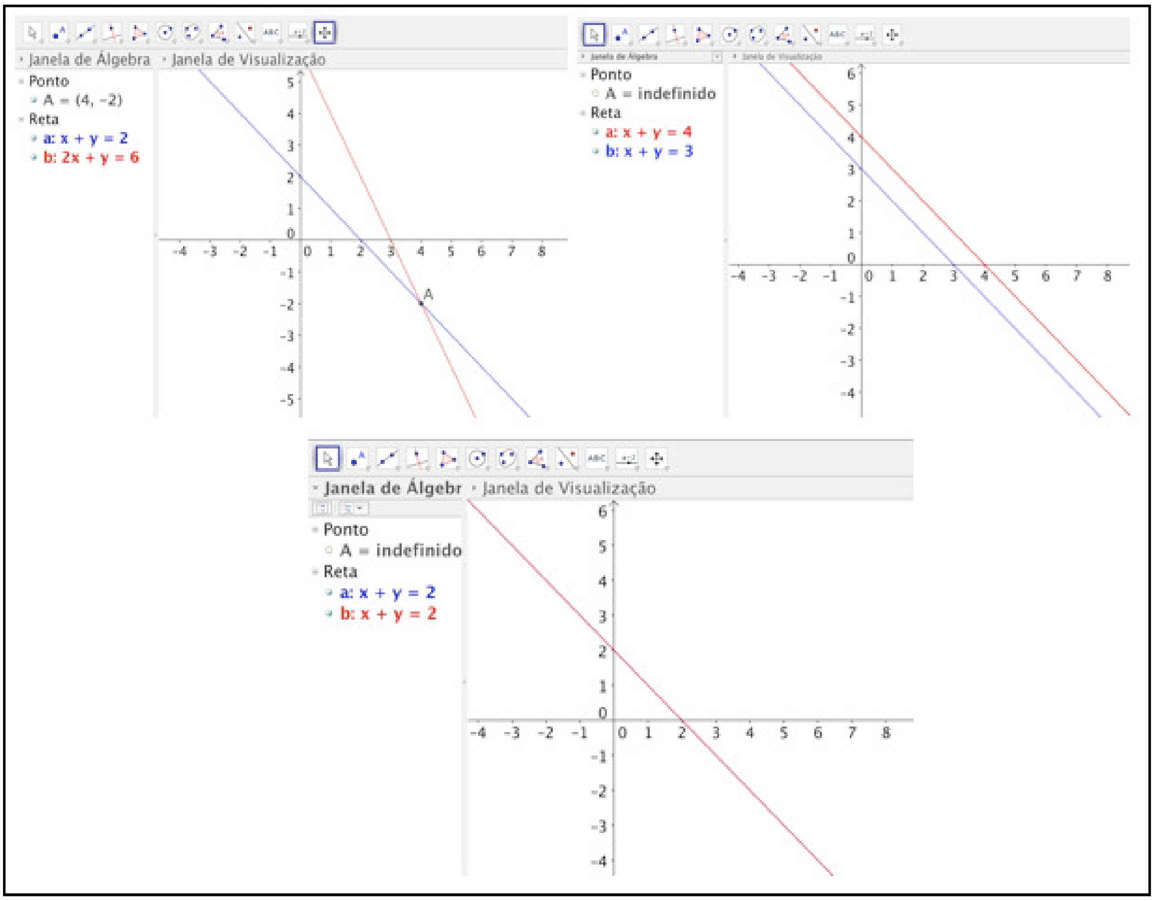


Concluindo, assim, que as retas podem assumir as seguintes posições relativas: retas paralelas; retas coincidentes; e retas concorrentes. A utilização de material concreto como recurso para auxiliar na visualização das posições relativas entre duas retas está estreitamente conectada com a ideia de Piaget (2012) que defende que, ao trabalharmos com adolescentes da faixa etária dos alunos que participaram da atividade, torna-se necessário compreender o processo cognitivo de aprendizagem dos mesmos.

Após responder o questionário prévio, os alunos construíram, no *Geogebra,* o gráfico das equações dos três sistemas propostos, cada qual num sistema de eixos. Abaixo, na figura

5, seguem os gráficos dos três Sistemas de Equações Lineares propostos, representados no *software Geogebra.*

FIGURA 5 - Representação geométrica no software Geogebra dos três Sistemas de Equações Lineares propostos



A partir da visualização dos gráficos no *software* e da marcação dos pontos de interseção das retas de cada sistema, solicitamos aos estudantes que estes socializassem os resultados obtidos com algum colega e, posteriormente, com o grupo. Durante esta troca, foi possível observar que os alunos perceberam quais são os tipos de soluções que existem para Sistemas de Equações Lineares de ordem 2, embora, nesse momento, esta classificação não tenha sido formalizada. Este fato ficou evidente em falas dos alunos B, H e M: “Pois é, o primeiro sistema apresenta um ponto de interseção ao longo da reta.” (Aluno B). “No segundo caso o ponto é indefinido, pois todos se encontram." (Aluno H). "Este sistema, apresenta infinitos resultados, pois se encontram ao longo de toda a reta." (Aluno B). "Já neste sistema não é possível achar um resultado, pois são retas paralelas, ou seja, que não se encontram." (Aluno B). "No terceiro caso, os pontos não se encontram, pois no *Geogebra* as retas nunca se encontram." (Aluno M). As reflexões/discussões expressas após a execução da atividade demonstram que os alunos, a partir do diálogo estabelecido, construíram autonomia e criticidade em suas ações (FREIRE, 1987).

A COMPREENSÃO DA SOLUÇÃO DOS SISTEMAS A PARTIR DA COMPARAÇÃO: O CONFRONTO ENTRE O PENSAR ALGÉBRICO E O PENSAR GEOMÉTRICO

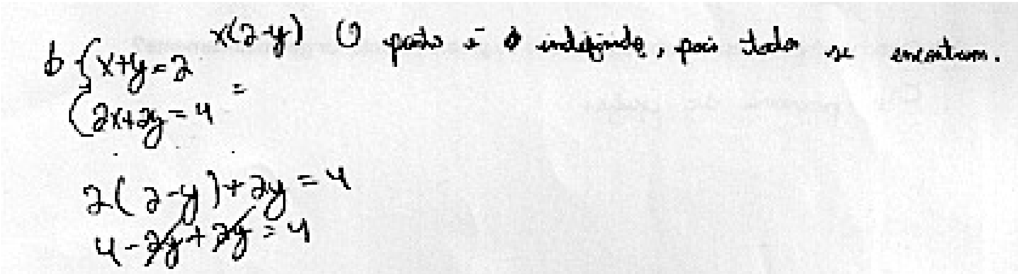
Nas respostas à primeira questão do questionário final, os alunos, ao resolverem os mesmos sistemas de forma algébrica, concluíram que o resultado algébrico obtido tinha uma relação com as interseções das retas de cada sistema. Este entendimento ficou evidente em algumas respostas apresentadas pelos alunos em relação ao primeiro, segundo e terceiro sistemas, respectivamente: "No primeiro caso eu encontrei (4, -2) e no *Geogebra* só se encontram em um ponto." (Aluno M). "O resultado da conta algébrica é o mesmo da interseção." (Aluno A). Nesse caso, os alunos A e H, ao resolverem algebricamente o primeiro sistema, verificaram que a resposta obtida após a resolução se equiparava com o ponto de interseção dos sistemas gerados no *Geogebra*, isto é (4, -2), a partir disso, os alunos concluíram que havia somente uma solução: o x seria igual a 4 e o y igual a -2.

O aluno M, ao resolver o segundo sistema proposto, pelo método da substituição de variáveis, chegou ao resultado 4 igual a 4. Essa resposta foi percebida pelo aluno de maneira confusa e causou nele certo estranhamento, pois segundo ele, nunca havia chegado nesse resultado ao resolver uma equação de primeiro grau. Nesse caso, foi imprescindível o uso da tecnologia, não somente para a visualização da solução do sistema, mas sim, para a compreensão do mesmo, pois ao comparar os resultados, os alunos foram capazes de fazer conjecturas formulando um pensamento de validação (ZULATTO, 2002; BORBA, 2010) e de não-validação (LABORDE, 2000; BORBA, 2010) das respostas obtidas. Chegar à resposta 4 é igual a 4 (Figura 6), significa, geometricamente, que todos os pontos das retas projetadas se

Revista de Educação Dom Alberto
ISSN 2316-2260

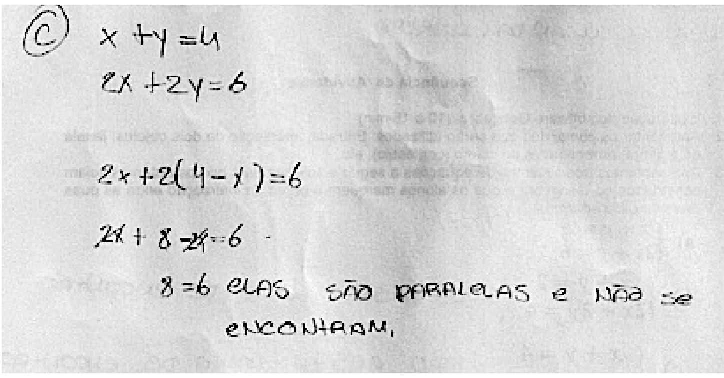
encontram: “x e y continuam sendo indefinidos, pois não podemos dar um valor exato à eles.” (Aluno M).

FIGURA 6 - Resolução algébrica do aluno M para o segundo sistema de equação proposto



Já, o aluno H, ao resolver algebricamente o terceiro sistema proposto, encontrou o resultado de que 8 era igual a 6 (Figura 7), o que matematicamente, é um absurdo. Ao observar como o sistema havia se comportado graficamente, o aluno percebeu que as retas se apresentavam como paralelas, sendo impossível um encontro entre as duas: “O resultado não é possível dentro da matemática, pois as retas são paralelas, sendo impossível dar uma solução válida para a solução do sistema.” (Aluno H).

FIGURA 7 - Resolução algébrica do aluno H para o terceiro sistema de equação proposto



A partir da fala dos alunos e das observações que realizamos em aula, percebemos que, muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao entendimento da resolução algébrica, foram esclarecidas quando utilizado o *software Geogebra,* pois os alunos foram capazes de investigar diferentes formas de construção para a resolução do problema, neste caso, a resolução geométrica (SANTOS, 2008).

Em relação às respostas sobre o que os alunos haviam aprendido após a realização da atividade proposta, ficou claro que os mesmos compreenderam que a solução de um Sistema de Equação Linear de ordem 2 não se apresenta apenas como um número, mas sim como o ponto de interseção entre duas retas de um mesmo plano, representadas por suas respectivas equações (BARATOJO, 2007). Além disso, ficou evidente que a utilização de procedimentos algébricos para obter a solução de um sistema linear não é a única via possível, e nem sempre é a de melhor compreensão por parte dos alunos: “Aprendi a ler gráficos e solucionar questões sem uma necessidade de resolução algébrica.” (Aluno B). “Que vendo no gráfico é o mesmo resultado da conta.” (Aluno H). “Que não precisamos fazer contas para resolver as equações.” (Aluno C).

Embora os alunos tenham exclamado certo entusiasmo na utilização do *software Geogebra*, alguns encontraram obstáculos durante a utilização do mesmo. Destacaram, por exemplo, ter dificuldades em relação à utilização de alguns recursos, como é o caso do aluno H: Apresentei dificuldade em “entender como se faz os pontos de encontro das retas” (Aluno H).

Além disso, quando a escala dos eixos era aumentada, as retas, que eram paralelas, apresentavam-se aos alunos como coincidentes. Essa foi uma dúvida que o aluno H expressou: “olha professora, elas se juntam lá no fundo” (Aluno H). A partir desse questionamento, foi possível estabelecer uma discussão de aproximação e afastamento das retas dentro de uma determinada escala. Um aspecto, que no nosso entendimento, está além da observação. Ao observar pela tela do computador o aluno viu duas retas coincidentes, mas as equações que as geravam, geravam-nas como paralelas. Nesse caso, se faz imprescindível, além da discussão de ordem escalar, a abstração que o aluno deve fazer em relação à situação estudada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, que teve como principal objetivo abordar o estudo das soluções de Sistemas de Equações Lineares de duas equações e duas variáveis, a partir de sua representação geométrica, através do uso do *software Geogebra*, com alunos do nono ano do Ensino Fundamental, trouxe-nos alguns resultados interessantes quanto à socialização, à ampliação de conhecimentos tecnológicos e matemáticos e à aprendizagem durante o exercício de comparação de resultados.

Foi possível perceber que, embora os alunos apresentassem algumas dificuldades quanto aos comandos do *Geogebra*, quando eles utilizaram o *software* para resolver os sistemas, além de eles visualizarem a imagem na tela, discutiram o procedimento e o resultado de suas construções com os colegas, promovendo, assim, uma interação e um espírito de solidariedade em sala de aula.

Outra questão importante foi à aprendizagem que os alunos adquiriram quanto à tecnologia, pois os mesmos não conheciam o *software Geogebra*, nem sabiam dos recursos que o mesmo oferecia para a construção de objetos matemáticos. Além disso, ao utilizarem o recurso para visualizar as soluções dos sistemas propostos, perceberam que havia somente três possíveis resultados para os mesmos: uma solução, representada por um ponto de interseção entre as retas; infinitas soluções, representada pela sobreposição das retas; ou nenhuma solução, representada pelo paralelismo entre as retas.

Uma última questão que consideramos importante foi quanto à comparação algébrica e geométrica das soluções dos sistemas propostos. Para os alunos, alguns resultados obtidos a partir da resolução algébrica não faziam sentido e ao observarem a solução geométrica, conseguiam perceber o comportamento do sistema. Para outros alunos, comparar os resultados se mostrava como uma maneira de validá-lo, pois percebiam, por exemplo, que as coordenadas que formavam o ponto de interseção das retas que compunham um sistema eram equivalentes aos valores do x e do y que eles haviam encontrado na resolução algébrica do mesmo.

Outras direções podem ser trilhadas ao se abordar o ensino das soluções de Sistemas de Equações Lineares a partir de sua representação geométrica, combinada com a tecnologia. Uma possibilidade para continuar este estudo, no Ensino Médio, é trabalhar as soluções de um Sistema de Equações Lineares de ordem 3 a partir da representação gráfica das soluções do sistema usando o *software Geogebra 3D*.

REFERÊNCIAS

BARATOJO, José Teixeira. **Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares***.* Porto Alegre: EDIPUCRS, 2007.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. **Anais do 10º Encontro Nacional de Educação Matemática**, Salvador, BA, Brasil, jul. 2010.

CARNEIRO, Pedro Sica. **Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações***.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 2007.

CURY, Helena Noronha; BISOGNIN, Eleni. Análise de soluções de um problema representado por um sistema de equações. **Bolema**, 33, 135-152, 2009.

FREIRE, Paulo. **Medo e ousadia. O cotidiano do professor***.* Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 1987.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Anais do 4º Congresso da Rede Iberoamericana de Informática Educativa***,* Brasília, DF, Brasil, out., 1998.

JORDÃO, Ana Lucia Infantozzi. *Um* **Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 2011.

LABORDE, Colette. Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. **Educational Studies Mathematics, Dordrecht**, (44), 151-161, 2000.

MORAES, Roque; GALLIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Editora Unijuí, 2007.

PIAGET, Jean. **Seis estudos de psicologia** (25a ed.). Rio de Janeiro: Forense, 2012.

PONTE, João Pedro da. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante***,* 3(1), 3-18, 1994.

PORTANOVA, Ruth (Org.). **Um currículo de matemática em movimento**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2005.

SANTOS, Silvana Cláudia. Atividades de Geometria Espacial e Tecnologias Informáticas no Contexto da Educação a Distância Online. **Boletim GEPEM***, (53)*, 75-93, 2008.

ZULATTO, Rúbia Barcellos Amaral. **Professores de Matemática que Utilizam Softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil, 2002.

®Artigo aceito em jul./ 2014.