"REPRESENTATIVIDAD DE LA COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO" COMO UN INDICADOR DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

Vicenç Font[1]

Adriana Breda[2]

Filosofia da Educação Matemática

Resumen: El trabajo que presentamos, es, fundamentalmente, una reflexión teórica. En la primera parte se presenta la noción de idoneidad didáctica y, en particular, el criterio de idoneidad epistémica, siendo uno de sus indicadores la "representatividad de la complejidad del objeto matemático". En la segunda parte se justifica la presencia de este indicador a partir de una reflexión, realizada desde una perspectiva pragmatista, sobre su relación con la noción de proceso de conexión y de contexto

Palabras Clave: Idoneidad epistémica. Conexión. Contexto

1. EL INDICADOR "REPRESENTATIVIDAD DE LA COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO" COMO INDICADOR DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN

La noción de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS, a partir de ahora) (GODINO, BATANERO y FONT, 2007; 2008) es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (FONT, PLANAS y GODINO, 2010):

---

[1] Doctor por la Universidad de Barcelona. Universidad de Barcelona, vfont@ub.edu.

[2] Doctora por la Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Universidad de Los Lagos, adriana.breda@ulagos.cl.

Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son “buenas matemáticas”.

Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.

Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.

Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.

Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción.

Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos concordamos que es necesario implementar unas “buenas” matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. A continuación, por cuestiones de espacio, solo se reproducen los componentes e indicadores del criterio de idoneidad epistémica (BREDA y LIMA, 2016, p. 80):

Tabla 1. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

Componentes	**Descriptores**
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.

Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo) Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.

Tanto los componentes como los descriptores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (FONT, GODINO y GALLARDO, 2013; RONDERO y FONT, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (PINO-FAN, CASTRO, GODINO y FONT, 2013).

2. EL INDICADOR “REPRESENTATIVIDAD DE LA COMPLEJIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO” Y SU RELACIÓN CON LAS NOCIONES DE “CONEXIÓN” Y DE “CONTEXTO”

En esta sección nos planteamos responder primero a la pregunta ¿cuáles son los diferentes usos que se hacen de los términos “contexto” en la Didáctica de las Matemáticas? para después proponer un punto de vista pragmatista sobre el papel de los contextos intra y extra matemáticos, y de sus conexiones, en la emergencia de los objetos matemáticos en el proceso de su enseñanza y aprendizaje

Una primera observación es que la noción de proceso de conexión y la noción de contexto están estrechamente relacionados. En efecto, los principios y estándares del NCTM (2000) consideran el proceso de conexión, que es entendido como aquel que permite conectar diferentes contenidos matemáticos entre sí y también permite conectar las matemáticas con contextos extra matemáticos.

Con relación al término contexto, hay básicamente dos usos. Uno consiste en considerar el contexto como una situación que cae bajo el dominio de un determinado objeto matemático, mientras que el otro consiste en dar más detalles sobre el entorno. En el primer uso se pone la mirada en la relación entre el ejemplar y el tipo (entre lo concreto y lo abstracto, lo particular y lo general o entre lo extensivo y lo intensivo). En el segundo uso se pone el foco en las notaciones, las propiedades, las definiciones que enmarcan al término matemático que se considera, y se habla, por ejemplo, de contexto algebraico, de contexto geométrico, etc.

Un ejemplo para ilustrar estos dos usos lo tenemos en el caso de la circunferencia. Supongamos que se ha encontrado un trozo de un plato circular de cerámica antiguo y que se quiere exponer en un museo. Para ello, se tiene que construir un soporte circular con las dimensiones reales del plato y encajar, sobre él, el trozo de cerámica encontrado. Este problema se puede resolver dibujando tres puntos del borde del trozo de cerámica que determinan dos segmentos, después se construyen las dos mediatrices y el punto de corte de estas rectas nos da el centro de la circunferencia del plato completo; pero también se puede hacer dibujando primero un sistema de coordenadas, segundo determinado las coordenadas de los tres puntos y, tercero, plantear un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas lo cual nos permite hallar los tres parámetros de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. En ambos casos el contexto del trozo de cerámica se puede considerar un contexto extra matemático que cae bajo el dominio de la noción de circunferencia, pero, en un caso, la circunferencia se sitúa en un contexto intra matemático de geometría elemental y, en el otro, en un contexto intra matemático de Geometría Analítica.

Figura 1. Contexto extra matemático

El término contexto extra matemático conlleva pensar en la conexión que se puede dar entre el mundo real y las matemáticas. Para las situaciones no matemáticas que contextualizan un objeto matemático se han propuesto diferentes nombres y clasificaciones. “Problemas contextualizados”, “problemas del mundo real” “problemas relacionados con el trabajo”, “problemas situados” son sólo algunos de los diferentes nombres que se da a las tareas escolares que simulan situaciones del mundo real. La conexión entre un objeto matemático y un contexto extra matemática que cae bajo su dominio, nos sitúa en la perspectiva particular-general y conlleva el problema de la trasferencia del conocimiento usado o generado en un contexto a otro contexto diferente y, más en concreto, el problema de la trasferencia del conocimiento aprendido en la escuela a las situaciones prácticas de la vida cotidiana y viceversa. Se plantea, pues, un problema relacionado con la construcción del significado.

Con relación a la construcción del significado en nuestra opinión hay, básicamente, dos posiciones: 1) la semántica o referencial y 2) la pragmatista. El punto de vista semántico considera que el aspecto clave en la construcción del significado es el referente, es decir los ejemplos del objeto matemático. Desde esta perspectiva el problema de la contextualización más o menos sería el siguiente: 1) el profesor tiene que enseñar un objeto matemático descontextualizado y lo que tiene que hacer es buscar ejemplos concretos de dicho objeto, a ser posible situaciones reales, es decir tiene que contextualizar. A partir de estas situaciones, y como resultado del proceso de enseñanza-aprendizaje, el alumno ha de descontextualizar para construir el objeto matemático y posteriormente aplicar este objeto matemático a otros contextos (es decir ha de volver a contextualizar). Desde esta perspectiva todos los ejemplos son iguales ya que se considera que los ejemplos del objeto forman una clase homogénea. Este punto de vista tiene dificultades para explicar, entre otras cosas, la falta de transferencia de un contexto a otro y los fenómenos del prototipo — nos referimos a que las personas no suelen considerar los ejemplos de un concepto como una clase homogénea.

Frege introdujo la diferencia entre sentido y referente de un término. El referente es el objeto nombrado o al cual se hace referencia, mientras que el sentido es la manera de presentación. El ejemplo de la mediatriz puede ilustrar la diferencia entre sentido y referente. Podemos definir la mediatriz de un segmento como la perpendicular que pasa por el punto medio o como el lugar geométrico formado por todos los puntos equidistantes de los extremos. En cada definición relacionamos el término mediatriz con otros términos diferentes, pero nos estamos refiriendo al mismo referente. Ahora bien, para muchas personas, las dos definiciones pueden tener sentidos distintos porque la manera de presentación (la conexión con otros términos) permite considerar que cada una de estas definiciones tiene un referente diferente. Entender que las dos definiciones son equivalentes informa que dos definiciones, el sentido de las cuales se ha fijado de antemano, de manera que pueden referirse a referentes diferentes, se refieren al mismo referente.

Cada definición hay que entenderla como una definición-regla que, de entrada, no parece que indique que haya algo que sea preciso hacer. A las definiciones-reglas cabe atribuir valores veritativos (verdadero y falso). Por ejemplo, si consideramos la definición que dice que la mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio, dada una perpendicular podemos decir si es o no la mediatriz en función de que pase o no por el punto medio. Ahora bien, de una definición-regla se puede deducir una regla práctica (un procedimiento) que nos da instrucciones para construir la mediatriz. Esta práctica se puede dar en diferentes situaciones, por lo que se puede afirmar que una definición y su procedimiento derivado generan un conjunto de prácticas. A su vez, otra definición equivalente generará otro subconjunto de prácticas. Por tanto, en cada definición de mediatriz relacionamos el término definido con términos diferentes y con procedimientos de construcción diferentes. Pero no solo con procedimientos diferentes, también con proposiciones y notaciones diferentes. Dicho de otra manera, tenemos diferentes contextos intra matemáticos.

Desde un punto de vista pragmatista, el significado de un objeto matemático se entiende como el conjunto de prácticas en la que dicho objeto interviene de una manera determinante. Es decir, supone disponer de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca. Cuando se define el significado de un objeto matemático en términos de prácticas, tal como se propone en el pragmatismo, resulta que el significado de un objeto matemático queda ligado a otros significados y a otros objetos, puesto que en las prácticas interviene dicho objeto conjuntamente con otros objetos matemáticos. Este hecho, permite distinguir dos términos que resultan difíciles de diferenciar, nos referimos a los términos sentido y significado. En efecto, puesto que el objeto se puede relacionar con unos u otros objetos según el contexto, el tipo de notación, etc. para dar lugar a diferentes prácticas, podemos entender el sentido como un significado parcial, esto es como un subconjunto (sentido) del sistema de prácticas en las que el objeto es determinante (significado).

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a generar sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no genera todos los sentidos.

Un objeto matemático, que se ha originado como un emergente del sistema de prácticas que permite resolver un determinado campo de problemas, con el paso del tiempo queda enmarcado en diferentes programas de investigación. Cada nuevo programa de investigación permite resolver nuevos tipos de problemas, aplicar nuevos procedimientos, relacionar el objeto (y por tanto definir) de una manera diferente, utilizar nuevas representaciones, etc. De esta manera, con el paso del tiempo aparecen nuevos subconjuntos de prácticas (sentidos) que amplían el significado del objeto.

Según Font, Godino y Gallardo (2013), de acuerdo con el punto de vista pragamtista, para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar, es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos se articulan formando configuraciones epistémicas y se pueden entender como un contexto intra matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las cuales emergen. En el EOS, la introducción de la dualidad unitaria-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto matemático (mediatriz, para seguir con el ejemplo) con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las que el objeto matemático "mediatriz" no aparece directamente, lo que si aparece son representaciones de la mediatriz, diferentes definiciones de la mediatriz, proposiciones y propiedades de la mediatriz, procedimientos y técnicas que se aplican a la mediatriz y argumentos sobre la mediatriz. Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio de la mediatriz, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes

Desde esta perspectiva, un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica de enseñanza y aprendizaje para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo posible del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos intra matemáticos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto. Por otra parte, una vez seleccionada una muestra representativa de contextos intra matemáticos hay que seleccionar los contextos extra matemáticos que permiten hacer emerger las configuraciones epistémicas en las que se concretan dichos contextos intra matemáticos.

La mirada compleja aplicada al objeto matemático permite profundizar en el proceso de conexión entre significados parciales de un mismo objeto. Por una parte, la complejidad, estructurada en términos de un conjunto de configuraciones epistémicas, precisa cuáles son los componentes a conectar. Por otra parte, cada una de estas configuraciones epistémicas, entendidas como contextos intra matemáticos, se tienen que relacionar con los contextos extra matemáticos mediante la relación particular-general.

RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2015-64646-P, (MINECO/FEDER, UE), REDICE16-1520 (ICE-UB)

REFERENCIAS

BREDA, A.; LIMA, V. M. R. Estudio de caso sobre el anális didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 74-103, 2016.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 13, n. 6, p.1893-1918, 2017. .

FONT, V.; GODINO, J. D. e GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, p. 97–124, 2013.

FONT, V., PLANAS, N. e GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v. 33, n. 1, p. 89-105, 2010.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D., BATANERO, C. e FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática,** v. 10, p. 7-37, 2008.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM, 2000.

PINO-FAN, L.; CASTRO, W. F.; GODINO, J. D.; FONT, V. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. **PARADIGMA**, v. 34, n. 2, p. 123 – 150, 2013.

RONDERO, C. y FONT, V. Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33, n. 2, p. 29-49, 2015.

SECKEL, M.J. **Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática**. 2016. 291f. Tesis (Doctorado en Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica) - Universitat de Barcelona, Barcelona, 2016.